1. Valor de Shapley ponderado

Otro concepto de solución que es lineal es el Valor de Shapley ponderado. El Valor de Shapley del juego $\nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = 0$ y $\nu(\{1,2\}) = 1$ es $Sh(\nu)' = (1/2, 1/2)$; sin embargo, posiblemente alguno de los jugadores necesite realizar un mayor esfuerzo en la coalición $\{1,2\}$. A partir de esta consideración se sugiere repartir de acuerdo a ponderaciones preestablecidas. Esta idea da lugar al Valor de Shapley ponderado, un valor que no necesariamente satisface el axioma de simetría.

Definition 1. *Se dirá que S es una coalición natural de socios en el juego ν, si para cada $T \subset S$ $(T \neq S)$ y $R \subseteq N \backslash S$, $\nu(R \cup T) = \nu(R)$.*

Una coalición natural de socios se comporta como un solo individuo, ya que ninguna subcoalición propia tiene poder.

Axioma de sociedad. Si S es una coalición natural de socios en ν entonces $\psi_i(\nu) = \psi_i(\psi\nu(S)u_S)$ para todo $i \in$S.

La interpretación de este axioma es la siguiente: se espera que cada coalición natural de socios juege como un solo individuo en ν y negocie lo obtenido entre sus elementos en forma independiente.

Definition 2. *El Valor de Shapley ponderado con un sistema de ponderación simple $w \in \mathbf{R}^n$, $w > 0$, es un mapeo lineal $Sh^w : G \to \mathbf{R}^n$ tal que:*

$$Sh_i^w(u_S) = \begin{cases} \frac{w_i}{w(S)} & \textit{si } i \in S \\ 0 & \textit{de otra forma} \end{cases}$$

Lema 1. *El Valor de Shapley ponderado con un sistema de ponderación simple $w \in \mathbf{R}^n$, se puede escribir como*

$$Sh_i^w(v) = w_i \sum_{T \ni i} \frac{\delta_T}{w(T)}$$

Demostración. Como $v = \sum_{T \neq \varnothing} \delta_T u_T$ y Sh_i^w es lineal

$$Sh_i^w(v) = \sum_{T \neq \varnothing} \delta_T Sh_i^w(u_T) = w_i \sum_{T \ni i} \delta_T \frac{w_i}{w(T)}$$

□

Lema 2. *Si i es un jugador nulo en v entonces $\delta_T(v) = 0$ para toda $T \ni i$.*

Demostración. Se tiene que,

$$\delta_{T \cup \{i\}} = \sum_{R \subseteq T \cup \{i\}} (-1)^{r+t+1} v(R) = \sum_{R \subseteq T} (-1)^{r+t+1} v(R) - \sum_{R \subseteq T} (-1)^{r+t+1} v(R \cup \{i\}) = 0.$$

□

Lema 3. $\delta_T(u_S) = \begin{cases} 1 & \textit{si } S = T \\ 0 & \textit{de otra forma} \end{cases}$

Demostración. Se sigue de la unicidad de las deltas y de que las deltas propuestas en el lema satisfacen (**??**). □

Lema 4. *Si S es una coalición natural de socios, $T \cap S \neq \emptyset$ y $S \nsubseteq T$ entonces $\delta_T = 0$.*

Demostración. Supóngase que $S \nsubseteq T$ y $S \cap T \neq \emptyset$, entonces

$$\delta_T = \sum_{R \subseteq T} (-1)^{t+r} \nu(R)$$

ahora para $R \subseteq T$, sea $R_s = S \cap R$ y $R_t = R \cap (T \backslash S)$,

$$= \sum_{R_t \subseteq T \backslash S} \sum_{R_s \subseteq S \cap T} (-1)^{t+r_s+r_t} \nu(R_s \cup R_t)$$

$$= \sum_{R_t \subseteq T \backslash S} (-1)^{r_t} \nu(R_t) \sum_{R_s \subseteq S \cap T} (-1)^{t+r_s} = 0$$

por el lema 4.3. □

Teorema 1. *ψ es una solución lineal que satisface los axiomas de sociedad, nulidad y $\psi(u_N) > 0$ si y sólo si existe w tal que ψ es el Valor de Shapley ponderado con sistema de ponderación simple w.*

Demostración. Sea ψ una solución que satisfaga los axiomas mencionados en el teorema. Como S es una coalición natural de socios en u_N:

$$\psi_i(u_N) = \psi u_N(S) \psi_i(u_S)$$

así, basta considerar $w_i = \psi_i(u_N)$ y sustituir en la ecuación anterior para obtener para $\psi_i(u_S) = w_i / w(S)$.
Ahora, la demostración del teorema en la otra dirección, (Sh^w satisface los axiomas del teorema)

a) Sh^w satisface nulidad. Si el jugador i es un jugador nulo en ν, entonces $Sh_i^w(v) = 0$ por los lemas 1 y 2.

b) Sh^w satisface eficiencia.

$$\sum_{i \in N} Sh_i^w(v) = \sum_{i \in N} \sum_{T \ni i} w_i \frac{\delta_T}{w(T)} = \sum_{T \subseteq N} \sum_{i \in T} w_i \frac{\delta_T}{w(T)}$$
$$= \sum_{T \subseteq N} \delta_T = v(N)$$

c) Sh^w satisface el axioma de sociedad. Supongamos S una coalición natural de socios e $i \in S$, entonces

$$Sh_i^w(u_S) \sum_{k \in S} Sh_k^w(v) = \frac{w_i}{w(S)} \sum_{k \in S} \sum_{T \ni k} w_k \frac{\delta_T}{w(T)}$$
$$= \frac{w_i}{w(S)} \sum_{T \cap S \neq \varnothing} \sum_{k \in T \cap S} w_k \frac{\delta_T}{w(T)} = \frac{w_i}{w(S)} \sum_{T \cap S \neq \varnothing} w(T \cap S) \frac{\delta_T}{w(T)}$$
$$= \frac{w_i}{w(S)} \sum_{T \supseteq S} \frac{w(S)}{w(T)} \delta_T = w_i \sum_{T \supseteq S} \frac{\delta_T}{w(T)} = Sh_i^w(v)$$

□