Teoría de Juegos

Tarea III

1. Dado un juego cooperativo (N, v) es posible construir el correspondiente ***juego dual*** (N, v^*) con funcion característica $v^*(S) = v(N) - v(N \backslash S)$ para todo $S \subseteq N$. Con ello, una solución $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ se dice ***autodual*** si $\psi(v) = \psi(v^*)$. ¿Son los valores de Shapley, de Banzhaf-Coleman y Shapley ponderado soluciones autoduales? Demuestra tus aseveraciones.

2. Un científico ha sido invitado para dar consultorías a tres ciudades distintas. Además de sus honorarios se le tienen que dar viáticos. Sin embargo, como las ciudades están relativamente cercanas, éstos pueden reducirse drásticamente si todo se acomoda en un solo viaje. El problema es cómo dividir los gastos entre las tres ciudades. Los viajes en una sola dirección entre las ciudades *A,B,C* y su lugar de residencia H son:

Entre A y H, costo $= 7$	Entre A y B, costo $= 2$
Entre B y H, costo $= 8$	Entre A y C, costo $= 4$
Entre C y H, costo $= 6$	Entre B y C, costo $= 4$

   Supón que el valor de la visita es el mismo para todas las ciudades, digamos 20 unidades cada una.

   (a) Plantea el problema como un juego cooperativo y encuentra cómo se deben dividir los gastos según el valor de Shapley.

   (b) Supón que en las ciudades se conoce el número promedio de individuos que asistirán a las ponencias, y éste es 185, 230 y 195 para *A,B,C*, respectivamente. Utilizando esta información como ponderaciones, calcula cómo se deben dividir los gastos según el valor de Shapley ponderado.

3. En la mesa directiva de un cierto sindicato (con $2k + 3$ miembros) se considera que una resolución es aprobada si se tiene al menos $2k+1$ votos. Tanto el secretario general como el presidente tienen k votos, mientras que los demás miembros tiene solamente un voto.

   (a) Modela la situación de votación como un juego cooperativo simple.

   (b) Calcula el valor de Banzhaf-Coleman y el índice de Shapley-Shubik para el juego anterior. Interpreta los resultados.

4. En el Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas hay 15 países votantes, incluyendo a "los cinco grandes". Para aprobar una resolución se necesitan 9 de los 15 votos, pero cada país de los "cinco grandes" tiene poder de veto. Una forma de modelar esta situación es considerar que cada país de los "cinco grandes" tiene 7 votos, cada uno de los otros países, 1 voto, y que se necesitan 39 votos para aprobar una resolución.

(a) Encuentra el valor de Shapley del juego.

(b) Encuentra el valor de Banzhaf-Coleman del juego.

5. Considera el juego cooperativo (N, v) con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } |S| \leq 1; \\ 60, & \text{si } |S| = 2; \\ 96, & \text{si } |S| = 3; \\ 108, & \text{si } |S| = N. \end{cases}$$

Para $g = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}\}$, calcula el valor de Myerson.

6. Para un conjunto de agentes $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ se define una estructura de cooperación g **de una capa** si para dos nodos $l_0, l_2 \in N$ (llamados **origen** y **destino**, respectivamente) y $L_1 = N \backslash \{l_0, l_2\}$ (la **capa**) se tiene que

$$g = \bigcup_{i \in L_1} \{(l_0, i), (l_2, i)\}.$$

Para el juego cooperativo (N, v) con función característica $v(S) = |S| - 1$ para todo $S \subseteq N$, calcula el valor de Myerson para este juego cuando la estructura de cooperación entre los jugadores es de una capa.