Teoría de Juegos

Tarea II

1. Un juego cooperativo (N, v) es ***aditivo*** si para todo $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$ se cumple que $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$. Demuestra que el valor de Shapley de (N, v) para cada jugador $i \in N$ es igual a $v(\{i\})$.

2. Ana tiene un paquete de 40 kg. y Beatriz uno de 55 kg. que necesitan transportar desde sus casas hacia cierto destino. Ellas no pueden, por sus capacidades de fuerza, llevar los paquetes por sí mismas. Además, al entregarlo les pagarán \$240 y \$280, respectivamente. Tienen tres amigos en común que pueden ayudarles con esa tarea (y por ayudarlas ellos recibirán un pago): Carlos puede cargar hasta 35 kg., David, hasta 45 kg. y Ernesto, hasta 30 kg. Ellos pueden trabajar en conjunto y al hacerlo, sus capacidades de carga se suman.

   (a) Plantea la situación anterior como un juego cooperativo.

   (b) Escribe el juego cooperativo anterior en términos de los juegos de unanimidad y utiliza esta descomposición para calcular el valor de Shapley del juego.

   (c) Para cada $T \subseteq N$, constrúyase el juego (N, χ_T) dado por

   $$\chi_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S = T; \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \forall S \subseteq N.$$

   - Muestra que todo juego cooperativo puede descomponerse en términos de los juegos (N, χ_T).
   - Calcula el valor de Shapley para cada juego (N, χ_T).
   - Realiza la descomposición del juego del inciso *a)* en términos de estos juegos y utiliza los resultados del inciso anterior para calcular el valor de Shapley del juego.

3. Dado un juego cooperativo (N, v), denótese como $D(v)$ al conjunto de jugadores nulos de v. Considera la siguiente solución:

   $$\psi_i(v) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{S \ni i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{(n-1)n!} \left[v(N) + v(S) - v(S \backslash \{i\}) \right], & \text{si } i \notin D(v); \\ v(\{i\}), & \text{si } i \in D(v). \end{cases}$$

   ¿Satisface esta solución los axiomas de aditividad, simetría, nulidad, eficiencia y monotonía fuerte? Demuestra tus aseveraciones.

4. Considera un mercado con un único bien divisible. El conjunto N de jugadores se divide en dos conjuntos disjuntos: los compradores B y los

vendedores C, $N = B \cup C$. Cada vendedor posee cierto monto del bien, digamos que el vendedor $k \in C$ posee y_k, y cada comprador demanda cierto monto del bien, digamos que el comprador $j \in B$ demanda x_j. Asúmase que el mercado es balanceado, esto es, que la cantidad de bien ofertado es igual a la demanda, $\sum_{k \in C} y_k = \sum_{j \in B} x_j$. Con esto, podemos establecer el juego

$$v(S) = \min \left\{ \sum_{j \in S \cap B} x_j, \sum_{k \in S \cap C} y_k \right\} \qquad \forall S \subseteq N$$

La valía de una coalición es el monto total del bien que entra en negociación cuando sus miembros deciden cooperar. Encuentra el valor de Shapley de este juego. (*Hint*: permutaciones).

5. Considera el juego cooperativo (N, v) cuya función característica satisface

$$v(S) = k \quad \text{si} \quad \{1, \ldots, k\} \subseteq S \quad \text{pero} \quad k + 1 \notin S.$$

Por ejemplo, $v(\{2,3,5\}) = 0$, $v(\{1,3,4,6\}) = 1$ y $v(\{1,2,3,5,6,7\}) = 3$. Encuentra el valor de Shapley de este juego (*Hint*: descomponer el juego).