CAPíTULO 1

Juegos Cooperativos

1. Preliminares y definiciones

Este capítulo se restringirá al estudio de los principales resultados para los juegos cooperativos obtenidos hasta ahora. Después de dar algunos conceptos básicos, se estudiarán el núcleo, los conjuntos estables y el Valor de Shapley, así como algunas interrelaciones interesantes.

Con el fin de concretar ideas, considére el siguiente problema: dos empresas se enfrentan a una situación en la cual, si actúan independientes, logran conseguir una utilidad mensual de 1 y 10 millones, respectivamente. Además, se estima que si ellas deciden actuar conjuntamente, pueden obtener una utilidad mensual conjunta de 20 millones. Bajo este supuesto, lo que más conviene a las compañías es actuar conjuntamente, pero para que ello suceda, primero tienen que ponerse de acuerdo en cómo dividir los 9 millones restantes y esto está muy lejos de tener una respuesta trivial. La situación se complica aún más en caso de considerar más de dos compañías, sobre todo si cada una ha estimado cuánto podría conseguir con cada una de las coaliciones que puede formar, en virtud de lo cual cada una puede amenazar con unirse a otras con el fin de incrementar sus ganancias.

Aunque el ejemplo ilustra el tipo de aplicaciones que se pueden esperar de los juegos cooperativos, no proporciona una idea general de su alcance; por ello se tratarán ejemplos a lo largo del capítulo que amplíen esta perspectiva.

Supóngase un conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jugadores. A cualquier subconjunto no vacío de N, se le llamará coalición. Además, se denotará por $\mathcal{C}$ a la potencia de N;[1] los elementos de $\mathcal{C}$ son subconjuntos de jugadores y se interpretarán como los diferentes grupos de jugadores que se pueden formar para jugar unidos.

Definición 1. *Por un juego n-personal en forma de función característica se entenderá una función real ν sobre los subconjuntos de N*

$$\nu : \mathcal{C} \to \mathbf{R}$$

tal que $\nu(\emptyset) = 0$.

La interpretación intuitiva de cada uno de los conceptos anteriores es la siguiente:

- **a):** Una coalición $S \in 2^N = C$, es un subconjunto de jugadores que potencialmente pueden jugar unidos, en cuyo caso, consiguen una ganancia conjunta de $\nu(S)$. Una coalición se considera formada no sólo cuando los jugadores que la constituyen han decidido jugar unidos, sino que también están de acuerdo en como repartir la ganancia conjunta $\nu(S)$.

[1] Esto es, el conjunto de los subconjuntos de N. Se acostumbra denotar al conjunto potencia de un conjunto S por el símbolo 2^S.

b): El juego ν sólo especifica la ganancia que puede obtener cada una de las coaliciones.

c): Una partida se lleva a cabo en la siguiente forma: conociendo cada uno de los jugadores la función ν, negocian libremente para formar coaliciones, hasta obtener una partición $P = \{S_1, \ldots, S_r\}$ de N donde cada S_j es una coalición que efectivamente se ha logrado formar. La partida termina con el pago de las ganancias según lo acordado.

d): Como resultado de cada partida se obtiene un vector $x \in R^n$, donde x_i es la ganancia que obtuvo el jugador i en la negociación. El problema principal en este tipo de juegos es el encontrar un vector o un conjunto de ellos que sean "justos" para un juego dado.

Aquí se verá qué vectores de pago son admisibles de acuerdo a criterios determinados, qué coaliciones se forman o se deberían formar, cuánto está dispuesto a dar o recibir cada jugador en cada coalición a cambio de su cooperación y, en caso de que se forme, cómo se reparte el monto $\nu(S)$ entre los elementos de S. Todo esto se realizará dando diferentes conceptos de solución, estudiando sus propiedades y las ventajas y desventajas de cada uno de ellos, así como algunas relaciones que guardan entre sí.

Es importante señalar que no se analizará el problema de la traición entre los jugadores; es decir, que en general se pensará que se respetan todos los acuerdos. Por otro lado, se supone la divisibilidad arbitraria de los pagos. Empero, en muchas ocasiones no se tiene esta propiedad, por ejemplo una coalición puede ganar un automóvil que, evidentemente, sólo puede pertenecer a un jugador. Sin embargo, aun en este tipo de situaciones, existen formas de evadir el problema tales como efectuar una rifa o pagar a los demás jugadores una compensación en efectivo. El lector interesado en profundizar en el estudio del problema planteado anteriormente, puede buscar literatura bajo el nombre de juegos sin pagos laterales o juegos sin utilidades transferibles.

A continuación se dan algunos ejemplos de juegos:

Ejemplo 3.1. Juego de unanimidad. El juego está definido por

$$\nu(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S = N \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Una interpretación de este juego puede realizarse suponiendo que alguien regala 1,000 pesos al conjunto de jugadores N, con la única condición de que todos estén de acuerdo en cómo repartirlo. Nótese que sólo hay ganancia cuando todos cooperan.

Ejemplo 3.2. Juegos de mayoría simple, $n \geq 3$. Imagínese una situación en la que se acepta alguna propuesta sólo cuando cuenta con más del 50 % de los votos. Si se representa con 1 ganar y con 0 perder, y se considera que una coalición es un hecho cuando todos los integrantes son unánimes en su voto, entonces el juego puede representarse por: [2]

$$\nu(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2 \mid S \mid > n \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Ejemplo 3.3. Juego de mayoría ponderada, $n \geq 3$. Considérese una situación similar a la del ejemplo anterior, pero con dos modificaciones. Primero, los jugadores

[2] $\mid S \mid$ denotará a la *cardinalidad* o número de elementos de S.

no necesariamente poseen el mismo peso sobre la decisión final, dado que se supone que el jugador i tiene el peso ω_i. Segunda, una coalición consigue lo que desea cuando la suma de los pesos de los jugadores que la componen es mayor que q, un número real dado. Así la función ν queda representada por:

$$\nu(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i \in S} \omega_i > q \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Este tipo de juegos quedará representado en lo sucesivo por $[q; \omega_1, ..., \omega_n]$.

Ejemplo 3.4. Mercado con m_1 compradores y m_2 vendedores. Supóngase una partición $P = \{N_1, N_2\}$ de N, donde $\mid N_1 \mid = m_1$ y $\mid N_2 \mid = m_2$. El juego viene dado por

$$\nu(S) = \min\{\mid S \cap N_1 \mid, \mid S \cap N_2 \mid\}$$

y puede interpretarse asumiendo que m_1 compradores y m_2 vendedores tratan de llegar a un acuerdo. Además, supóngase que cada vendedor sólo puede hacer, a lo sumo, un acuerdo con un comprador y viceversa. Los jugadores luchan por integrarse en parejas, cada una formada por un comprador y un vendedor y $\nu(S)$ representa el número máximo de parejas válidas que pueden formarse con los elementos de S.

Por razones naturales, el interés fundamental de los jugadores está puesto en el vector de pagos x, resultante de cada partida. Se comenzará pues por definir algunas propiedades que pueden poseer tales vectores.

Definición 2. *Un vector de pagos es cualquier elemento de $\mathbf{R}^n$ y sus coordenadas se indexan con los miembros de N. Dado un vector de pagos x, se denotará por $x(S)$ a*

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

Así, $x(S)$ es el monto total que consigue la coalición S con el vector de pagos x.

Definición 3. *Si x es un vector de pagos, se dirá que:*

- **a):** *x es individualmente racional si y sólo si $x_i \geq \nu(\{i\})$ para toda $i \in N$.*
- **b):** *x es racional de grupo si y sólo si $x(S) \geq \nu(S), S \in \mathcal{C}$.*
- **c):** *x es eficiente si y sólo si $x(N) = \nu(N)$.*
- **d):** *x es una imputación si y sólo si x es individualmente racional y eficiente. Se denotará por X al conjunto de imputaciones de ν es decir $X = \{x \mid x_i \geq \nu(\{i\}), x(N) = \nu(N)\}$.*
- **e):** *x es factible si y sólo si existe una partición $P = \{S_1, \ldots, S_r\}$ de N tal que: $x(S_j) \leq \nu(S_j), j = 1, \ldots, r$.*
- **f):** *x factible es óptima de Pareto si y sólo si no existe $y \in \mathbf{R}^n$ factible tal que $y \geq x$ y $y \neq x$. Por $\mathcal{OP}(\nu)$ se denotará al conjunto de vectores de pago óptimos de Pareto en ν.*

Con un vector x que sea individualmente racional, cada jugador obtiene con x al menos tanto como lo que puede garantizar jugando aisladamente, mientras que, con un vector racional de grupo, cada coalición obtiene al menos tanto como puede garantizar por su cuenta.

Definición 4. *Se dirá que el juego ν es superaditivo si y sólo si $\nu(S \cup T) \geq \nu(S) + \nu(T)$ cuando $S \cap T = \emptyset$.*

La mayoría de los juegos que surgen en la realidad son superaditivos, ya que al estar jugando juntos los elementos de $S \cup T$ pueden acordar jugar la partida como dos coaliciones diferentes, garantizando con ello cuando menos $\nu(S) + \nu(T)$. Tal es el caso que incluso varios autores exigen dicha condición a ν para considerarlo como un juego. Sin embargo, con la definición dada con anterioridad es fácil construir un juego que no la tenga. A continuación se listan algunas propiedades inmediatas de los juegos superaditivos.

Proposición 5. *Si ν es un juego superaditivo entonces $\sum_{j=1}^{r} \nu(S_j) \leq \nu(N)$ para toda partición $P = \{S_1, \ldots, S_r\}$ de N.*

Demostración. Dada una partición arbitraria $P = \{S_1, \ldots, S_r\}$, se tiene que

$$\nu(N) = \nu(\cup_{j=1}^{r} S_j) \geq \nu(\cup_{j=1}^{r-1} S_j) + \nu(S_r) \geq \ldots \geq \nu(S_1) + \ldots + \nu(S_r)$$

tal como se quería demostrar.

Esto significa que en juegos superaditivos no existe forma alguna de que se agrupen los jugadores para conseguir más de lo que pueden lograr jugando todos aliados. Esto, aunado al hecho de que la mayoría de los juegos que aparecen en la realidad son superaditivos justifica, al menos en cierto modo, el hecho de que la mayoría de los conceptos de solución se refieran a elementos del conjunto de imputaciones.

Lo anterior también explica la razón por la cual si $x(N) = \nu(N)$, entonces se dice que x es eficiente. En juegos superaditivos $\nu(N)$ es el máximo monto que se puede conseguir. El nombre es cuestionable en juegos donde se puede conseguir un monto mayor a $\nu(N)$. Sin embargo, se mantendrá esta terminología.

Proposición 6. *Si ν es un juego superaditivo, entonces,*

a): *x es factible si y sólo si $x(N) \leq \nu(N)$.*
b): *$x \in \mathcal{OP}(\nu)$ si y sólo si $x(N) = \nu(N)$.*

Demostración.

a): Supóngase x factible, entonces existe una partición $P = \{S_1, \ldots, S_r\}$, tal que $x(S_j) \leq \nu(S_j), j = 1, \ldots, r$. Sumando las r desigualdades se obtiene $x(N) \leq \sum_{j=1}^{r} \nu(S_j) \leq \nu(N)$ donde la última desigualdad está justificada por la proposición anterior. La implicación en la otra dirección es inmediata dada la partición $P = \{N\}$.

b): Supóngase $x \in OP(\nu)$, entonces x es factible. Además por a) $x(N) \leq \nu(N)$. Si $x(N) < \nu(N)$, entonces puede formarse un nuevo vector de pagos y definido por

$$y_i = x_i + [\nu(N) - x(N)]/n,$$

obteniendo que y es factible y $x < y$, contradiciendo el hecho de que x es óptima de Pareto. Así, $x(N) = \nu(N)$.

Ahora supóngase que x no es óptima de Pareto. Nuevamente la partición $P = \{N\}$ hace factible a x, así que debe existir un vector $y \geq x, y \neq x$

y una partición $P = \{S_1, \ldots, S_r\}$ tal que $x(S_j) \leq y(S_j) \leq \nu(S_j), j = 1, \ldots, r$ donde al menos una de las primeras desigualdades es estricta. Si se suman las r desigualdades se obtiene que:

$$\nu(N) = x(N) < \sum_{j=1}^{n} y(S_j) \leq \sum_{j=1}^{r} \nu(S_j) \leq \nu(N)$$

lo que es una contradicción.

2. El núcleo

En un sentido general e intuitivo, una solución al juego ν es un vector de pagos o en su defecto, un conjunto de vectores de pagos asociados al juego ν. El primer intento que se hará para encontrar soluciones razonables será el núcleo.

Definición 7. *Se dirá que un vector de pagos x puede ser bloqueado por S si y sólo si existe y tal que:*

a): $x_i \leq y_i$ *para todo* $i \in S$ *y* $x_i < y_i$ *para al menos un* $i \in S$.
b): $y(S) \leq \nu(S)$.

Es decir, x puede ser bloqueada por S, si y sólo si la coalición S tiene los incentivos (a) y el poder (b) para cambiar el vector de pagos x por y. Así, una condición intuitivamente razonable para que todos los jugadores acepten como solución a una imputación x, es que x no pueda ser bloqueada por ninguna coalición.

Definición 8. *Al conjunto de imputaciones que no pueden ser bloqueadas por alguna coalición se le llamará núcleo y se denotará por $C(\nu)$.*

Proposición 9. *El núcleo es el conjunto de imputaciones que poseen la propiedad de racionalidad de grupo, es decir,*

$$C(\nu) = \{x \mid x(S) \geq \nu(S) \text{ para toda } S \in \mathcal{C} \text{ y } x(N) = \nu(N)\}.$$

Demostración.

a): Supóngase que x es una imputación que no puede ser bloqueada por ninguna coalición, si $x(S) < \nu(S)$. Definiendo:

$$y_i = \begin{cases} x_i + (\nu(S) - x(S))/(\mid S \mid) & \text{si } i \in S \\ x_i & \text{de otra forma} \end{cases}$$

queda claro que x es bloqueada por S vía y. Así, $x(S) \geq \nu(S)$; además, $x(N) = \nu(N)$, ya que x es una imputación.

b): Si x es tal que $x(S) \geq \nu(S), x(N) = \nu(N)$, claramente x es una imputación. Ahora supóngase que x puede ser bloqueada por S vía y, entonces $x(S) < y(S) \leq \nu(S)$, contradiciendo la manera en que se definió x.

A continuación se darán algunos ejemplos para mostrar los alcances y limitaciones del núcleo. Se invita al lector a pensar en el significado que tendría el aceptar un vector de pagos del núcleo como solución de cada uno de ellos.

Ejemplo 3.5. Un juego simétrico particular, $n = 3$.

$$\nu(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mid S \mid = 1 \\ 2/3 & \text{si } \mid S \mid = 2 \\ 1 & \text{si } \mid S \mid = 3 \end{cases}$$

Supóngase $x \in C(\nu)$. Entonces:

a): $x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3.$
b): $x_1 + x_2 \geq 2/3.$
c): $x_1 + x_3 \geq 2/3.$
d): $x_2 + x_3 \geq 2/3.$
e): $x_1 + x_2 + x_3 = 1.$

Ahora, a), b) y e) implican $x_3 \leq 1/3$; a), c) y e) implican $x_2 \leq 1/3$ y de a), d) y e) se tiene $x_1 \leq 1/3$. Utilizando nuevamente e) se tiene finalmente que: $x = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Suponer racionalidad de grupo y eficiencia nos conduce a una única solución fácilmente aceptable por todos los jugadores.

Ejemplo 3.6. Juego de unanimidad.

$$\nu(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S = N \\ 0 & \text{si } S \neq N \end{cases}$$

Una imputación x está en el núcleo si y sólo si $x(S) \geq \nu(S)$ y $x(N) = \nu(N)$, lo cual ocurre en nuestro ejemplo si y sólo si $x(N) = 1$ y $x_i \geq 0, i \in N$, esto es si y sólo si x es una imputación. Por tanto:

$$C(\nu) = X$$

Suponer racionalidad de grupo y eficiencia no restringe al conjunto de imputaciones.

Ejemplo 3.7. Juego de mayoría simple con 3 jugadores.

$$\nu(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mid S \mid = 1 \\ 1 & \text{si } \mid S \mid = 2 \text{ ó } 3. \end{cases}$$

Supóngase $x \in C(\nu)$. Entonces:

a): $x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3.$
b): $x_1 + x_2 \geq 1.$
c): $x_1 + x_3 \geq 1.$
d): $x_2 + x_3 \geq 1.$
e): $x_1 + x_2 + x_3 = 1.$

Así, sumando b), c) y d) se obtiene que:

$$2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 3$$

lo que es incompatible con a) y e).

No existe imputación que posea la propiedad de racionalidad de grupo y eficiencia.

Ejemplo 3.8. Mercado con 2 compradores y 1 vendedor.

$$\nu(\{i\}) = 0,\ i = 1, 2, 3$$
$$\nu(\{1, 2\}) = 0$$
$$\nu(\{1, 3\}) = \nu(\{2, 3\}) = \nu(\{1, 2, 3\}) = 1.$$

Como antes, supóngase $x \in C(\nu)$. Entonces:

a): $x_i \geq 0$, para $i = 1, 2, 3$.
b): $x_1 + x_2 \geq 0$.
c): $x_1 + x_3 \geq 1$.
d): $x_2 + x_3 \geq 1$.
e): $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Procediendo como antes, es fácil ver que el único punto que satisface todas las condiciones es $x = (0, 0, 1)$. Los compradores posiblemente acepten a priori la idea de racionalidad de grupo, pero difícilmente la solución que de ello se desprende. Este no es un caso aislado como se mostrará más adelante. El concepto de núcleo es muy importante, de gran ayuda en la búsqueda de soluciones en muchos juegos. Su defecto, posiblemente sea que los jugadores buscan formar coaliciones y no tanto bloquearlas. A continuación se enuncian algunas propiedades del núcleo.

Proposición 10. *En general $C(\nu) \subseteq X$, si además ν es superaditiva entonces $C(\nu) \subset \mathcal{OP}(\nu)$.*

Definición 11. *El juego ν es de suma constante si y sólo si $\nu(S) + \nu(N \backslash S) = \nu(N)$ para toda $S \in \mathcal{C}$.*

Definición 12. *El juego ν es aditivo si y sólo si $\nu(S \cup T) = \nu(S) + \nu(T)$ cuando $S \cap T = \emptyset$.*

Proposición 13. *Si ν es un juego aditivo entonces ν es de suma constante.*

Proposición 14. *Si ν es de suma constante y $C(\nu) \neq \emptyset$ entonces ν es aditivo.*

Demostración. Sea $x \in C(\nu)$, primero se demostrará que $\nu(S) = x(S)$ para toda $S \in C$. Como $x \in C(\nu), x(S) \geq \nu(S)$. Supóngase $x(S) > \nu(S)$ para alguna $S \in C$. Entonces

$$x(N) = x(S) + x(N \backslash S) > \nu(S) + \nu(N \backslash S) = \nu(N)$$

contradiciendo el hecho de que $x \in C(\nu)$. Así, si $S, T \in C$ son tales que $S \cap T = \emptyset$, entonces

$$\nu(S \cup T) = x(S \cup T) = x(S) + x(T) = \nu(S) + \nu(T)$$

como se quería demostrar. Siguiendo la demostración se nota que $x = (\nu(\{1\}), \ldots, \nu(\{n\}))$ es el único punto que debe contener el núcleo.

Definición 15. *Se dice que un juego es simple si y sólo si $\nu(S) =$ 0 ó 1 para toda $S \subseteq N$ y $\nu(N) = 1$. Dado un juego simple se dirá que:*

a): *S es una coalición ganadora si y sólo si $\nu(S) = 1$.*

b): *i es un jugador vetador si y sólo si está en toda coalición ganadora.*

Proposición 16. *Si ν es un juego simple e $i = 1, \ldots, l$ son los únicos jugadores vetadores, entonces,*

$$C(\nu) = \{x \mid \sum_{i=1}^{l} x_i = 1, x_{l+1} = x_{l+2} = \ldots = x_n = 0\}.$$

Demostración.

a): Si x está en el núcleo de ν y $j > l$, entonces existe $T \in C$ tal que $j \notin T$ y $\nu(T) = 1$, de otra forma j sería vetador, así $x(T) \geq 1, x(N) = 1$ y $x_i \geq 0, i \in N$, lo que implica que $x_j = 0$.

b): Ahora supóngase x tal que $\sum_{i=1}^{l} x_i = 1, x_{l+1} = \ldots = x_n = 0$. Si $\nu(S) = 1$, entonces $\{1, \ldots, l\} \subseteq S$ de donde $x(S) \geq \nu(S)$. Además $x(N) = 1$, de donde x está en el núcleo de ν.

La proposición anterior define una clase más amplia que la del ejemplo 3.8, en donde difícilmente se aceptaría como solución a cualquier elemento del núcleo. Nótese que en un juego simple, un jugador vetador puede estar en coaliciones perdedoras y en algunos juegos puede necesitar la ayuda de uno o más jugadores no vetadores para ganar. Por otro lado puede haber un jugador no vetador que esté en casi toda coalición ganadora pero, por la proposición anterior, cualquier vector de pagos en el núcleo asigna el monto $\nu(N)$ sólo entre los jugadores vetadores. Sin embargo, es importante recalcar que el caso anterior no es el general. Hay juegos en los que por su estructura, el núcleo es una solución muy importante, ya que al menos una coalición no ejerce todo su potencial en cualquier imputación que no pertenezca al núcleo. Además el núcleo es muy importante para la teoría, como se verá posteriormente, ya que otros conceptos de solución se relacionan fuertemente con él.

3. Interpretación geométrica del núcleo

A lo largo de esta sección se supondrá que $\nu(\{i\}) = 0, i = 1, 2, 3$ y $\nu(N) > 0$. Con estos supuestos el conjunto de imputaciones se expresa como $X = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = \nu(N), x_i \geq 0\}$ un simplex en R^3. Además, recuérdese que en un triángulo equilátero la suma de las alturas asociadas a un punto es constante, es decir, esta suma no depende del punto que se considere.[3] Así, para un triángulo equilátero tal que la suma de las alturas asociadas a cualquier punto es $\nu(N)$, y donde cada vértice corresponde a un jugador, se tiene que cada punto del triángulo representa una imputación y la altura opuesta al vértice asociado al jugador i es el pago que obtiene con esa imputación.

[3] Considérese un triángulo equilatero y un punto dentro de él con alturas asociadas x_1, x_2 y x_3, entonces el área del triángulo está dada por:

$$\text{Área } = 1/2ax_1 + 1/2ax_2 + 1/2ax_3$$

de donde:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2(\text{Área})/a = \text{constante}$$

y la suma de las alturas no depende del punto x que se considere.

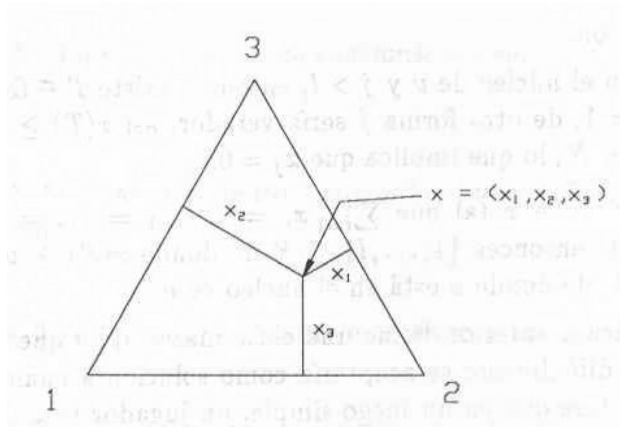
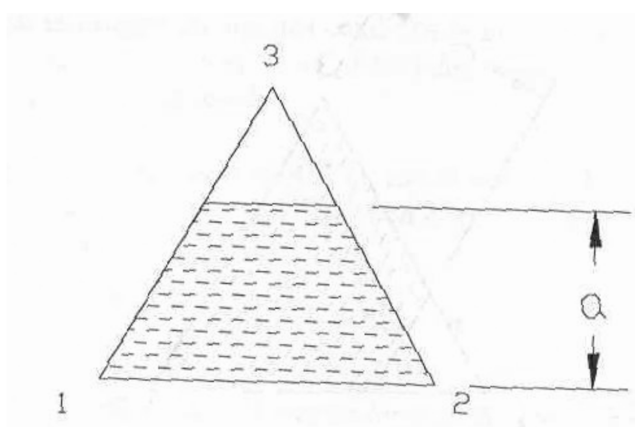


Figura 3.1

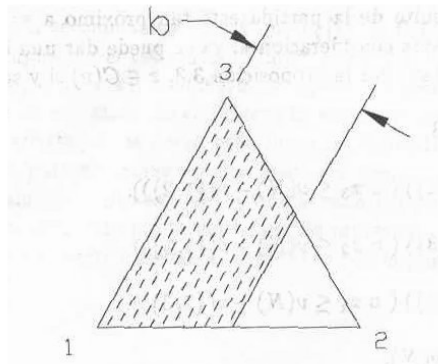
Nótese que cada jugador va a luchar para que el punto asociado a la imputación que resulte de la partida esté tan próximo a su vértice como sea posible. Con estas consideraciones, ya se puede dar una interpretación geométrica del núcleo. Por la proposición 3.3, $x \in C(\nu)$ si y sólo si:

a): $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$
b): $x_1 + x_2 \geq \nu(\{1,2\})$ (o $x_3 \leq \nu(N) - \nu(\{1,2\})$).
c): $x_1 + x_3 \geq \nu(\{1,3\})$ (o $x_2 \leq \nu(N) - \nu(\{1,3\})$).
d): $x_2 + x_3 \geq \nu(\{2,3\})$ (o $x_1 \leq \nu(N) - \nu(\{2,3\})$).
e): $x_1 + x_2 + x_3 = \nu(N)$.

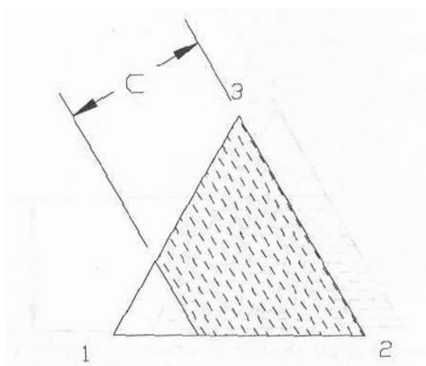
Las condiciones a) y e) sólo garantizan que se está hablando de un punto en el triángulo; por otro lado cada una de las condiciones b), c) y d) restringe al punto a estar en cada uno de los siguientes conjuntos, respectivamente.



Conjunto de puntos que satisfacen $x_1 + x_2 \geq \nu(\{1,2\})$, donde $a = \nu(N) - \nu(\{1,2\})$
Figura 3.2



Conjunto de puntos que satisfacen $x_1 + x_3 \geq \nu(\{1,3\})$, donde $b = \nu(N) - \nu(\{1,3\})$
Figura 3.3



Conjunto de puntos que satisfacen $x_2 + x_3 \geq \nu(\{2,3\})$, donde $c = \nu(N) - \nu(\{2,3\})$
Figura 3.4

Así, los puntos que satisfacen todas las condiciones si es que las hay, quedan representados geométricamente como:

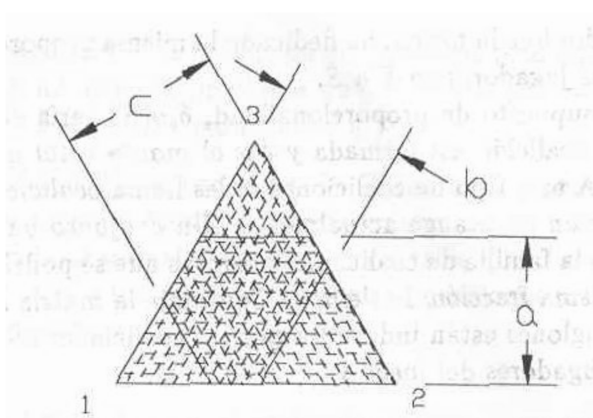


Figura 3.5

donde: $a = \nu(N) - \nu(\{1,2\})$, $b = \nu(N) - \nu(\{1,3\})$, $c = \nu(N) - \nu(\{2,3\})$.

4. Conjuntos balanceados

En esta sección se establecen algunas condiciones necesarias y/o suficientes para la no vacuidad del núcleo. Los principales resultados se obtienen a partir de los conjuntos balanceados.

Definición 17. *Se dirá que $\delta \in \mathbf{R}_+^{2^n-1}$, donde sus coordenadas están indexadas por las coaliciones $\emptyset \neq S \subseteq N$, con $\delta \geq 0$, es un vector de pesos balanceadores si y sólo si*

$$\sum_{S \ni i} \delta_S = 1, \ i = 1, \ldots, n$$

Al conjunto de vectores de pesos balanceadores se denotará por $\mathcal{P}$.

Si se permite la formación parcial de una coalición S, en el sentido de que cada jugador en S dedique sólo la fracción δ_s de su tiempo (o de su riqueza, o de sí mismo, etc.) a la coalición S, entonces $\delta \in R^{2^n-1}$ son pesos balanceadores si y sólo si cada jugador, ha comprometido exactamente el tiempo del que dispone entre las coaliciones; y además para cada coalición S, cada jugador que la forma, ha dedicado la misma proporción de su tiempo que los demás jugadores en S a S.

Bajo un supuesto de proporcionalidad, $\delta_s \nu(S)$ sería el monto que conseguiría una coalición así formada y $\delta' \nu$ el monto total que se conseguiría en el juego. A este tipo de coaliciones se les llama coaliciones borrosas y su estudio tiene un gran auge actualmente. Un conjunto balanceado B no es otra cosa que la familia de coaliciones borrosas que se podrían formar en una partida la misma fracción de tiempo. Considere la matriz A de $(2^n - 1) \times n$ donde los renglones están indexados por las coaliciones ($S \neq \emptyset$), sus columnas por los jugadores del juego y

$$a_{Sj} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in S \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

(los renglones de A corresponden a los vértices del cubo unitario en R^n). Además, supóngase que ι es el vector de unos en R^n.

Lema 18. *$\delta \in \mathcal{P}$ si y sólo si $\delta' A = \iota'$ y $\delta \geq 0$.*

Lema 19. *$x \in C(\nu)$ si y sólo si $Ax \geq \nu$ y $\iota' x = \nu(N)$.*

Teorema 20. *(Shapley–Bondareva). El núcleo de un juego es no vacío si y sólo si $\delta' \nu \leq \nu(N)$ para toda $\delta \in \mathcal{P}$.*

Demostración. Considérese el siguiente par de problemas duales de Programación Lineal.

$$\begin{array}{rlrl} \text{Primal:} & & \text{Dual:} & \\ \min & \iota' x & \max & \delta' \nu \\ \text{s.a.} & & \text{s.a.} & \\ & Ax \geq \nu & & \delta' A = \iota' \\ & x \text{ libre} & & \delta \geq 0 \end{array}$$

Nótese que independientemente de ν, ambos problemas son factibles y por lo tanto existe una solución óptima para cada uno de ellos. x es factible en el primal si y sólo si x es racional de grupo, y δ factible en el dual si y sólo si δ es un vector de pesos balanceadores. Con estos elementos se puede continuar con la demostración del teorema como sigue:

a): Si $C(\nu) \neq \emptyset$, existe $\bar{x} \in C(\nu)$, solución del problema primal, lo que implica que existe $\bar{\delta}$ solución de problema dual tal que $\nu(N) = \iota'\bar{x} = \bar{\delta}'\nu$, de donde, $\delta'\nu \leq \bar{\delta}'\nu = \nu(N)$ para todo $\delta \in P$.

b): Supóngase $\delta'\nu \leq \nu(N)$ para todo $\delta \in P$. Entonces el problema dual tiene una solución óptima finita, de donde existen soluciones $\bar{x}$ y $\bar{\delta}$ de los problemas primal y dual respectivamente tales que $\iota'\bar{x} = \bar{\delta}'\nu \leq \nu(N)$. Pero si $\iota'\bar{x} < \nu(N), \bar{x}$ no es factible en el problema primal, entonces $\iota'\bar{x} = \nu(N)$ y $\bar{x} \in C(\nu)$.

El teorema anterior dice que el núcleo de su juego es no vacío si y sólo si el máximo monto que se puede conseguir con coaliciones borrosas es $\nu(N)$.

Para cada vector $\delta \in P$ sea $B(\delta) = \{S \mid \delta_S > 0\}$. A $B(\delta)$ se le conoce como conjunto balanceado y a la colección $\{\delta_S\}_{\delta_S > 0}$ como sus pesos balanceadores.

La importancia del Teorema de Shapley-Bondareva es que caracteriza a los juegos con núcleo no vacío sólo en términos de conjuntos balanceados. Actualmente se está trabajando en caracterizar en esta forma los resultados que hasta ahora se han obtenido sobre el núcleo. Nótese que, a priori, parecen conceptos totalmente diferentes.

Definición 21. *$\hat{\delta} \in \mathcal{P}$ es minimal si y sólo si no existe $\delta \in \mathcal{P}$ tal que $\mathcal{B}(\delta) \subset \mathcal{B}(\hat{\delta})$.*

Teorema 22. *(Bondareva). El núcleo de un juego es no vacío si y sólo si $\delta'\nu \leq \nu(N)$ para toda $\delta \in \mathcal{P}$ minimal.*

Demostración. Sólo es necesario demostrar que si el lado derecho se cumple en este enunciado, entonces el lado derecho de la implicación en el teorema de Shapley–Bondareva hace lo propio. Supóngase δ no minimal y $\hat{\delta}$ minimal con $B(\hat{\delta}) \subset B(\delta)$ y sean $\alpha = \min\{\delta_S/\hat{\delta}_S \mid S \in B(\hat{\delta})\}$ y $\bar{\delta} = \delta - \alpha\hat{\delta}$ entonces:

a): $\bar{\delta}'A = \delta'A - \alpha\hat{\delta}'A = (1-\alpha)\iota'$.

b): $\bar{\delta} \geq 0$, ya que si $S \in B(\hat{\delta})$ entonces:

$$\bar{\delta}_S = \delta_S - \alpha\hat{\delta}_S \geq \delta_S - (\delta_S/\hat{\delta}_S)\hat{\delta}_S = 0$$

y si $S \notin B(\hat{\delta})$, $\bar{\delta}_S = \delta_S$.

c): $B(\bar{\delta}) \subset B(\delta)$, ya que la desigualdad del inciso anterior se satisface como igualdad para la coalición que define α.

d): $\alpha > 0$

Así $(1/(1-\alpha))\bar{\delta} \in P$ y tiene al menos una coordenada positiva menos que δ, si $(1/(1-\alpha))\bar{\delta}$ es minimal como $\delta = \bar{\delta} + \alpha\hat{\delta}$ se tiene que:

$$\delta'\nu = (1-\alpha)(1/(1-\alpha))\bar{\delta}'\nu + \alpha\hat{\delta}'\nu \leq (1-\alpha)\nu(N) + \alpha\nu(N) = \nu(N)$$

y si $\bar{\delta}$ no es minimal, se repite el procedimiento sustituyendo $\bar{\delta}$ por δ.

Siguiendo esta línea, se darán ahora condiciones necesarias y suficientes más fuertes para clases de juegos más restringidos.

Definición 23. *Se dirá que ν es un juego simétrico, si y sólo si, para cualesquiera dos coaliciones S y T con la misma cardinalidad, se tiene que $\nu(S) = \nu(T)$.*

En otros términos, ν es simétrico si $\nu(S)$ depende solamente de la cardinalidad (tamaño, número de miembros) de la coalición S.

Proposición 24. *Si ν es un juego simétrico, entonces, $C(\nu) \neq \emptyset$ si y sólo si $\nu(S)/\mid S \mid \leq \nu(N)/n$ para toda $S \in \mathcal{C}$.*

Demostración.

a): Supóngase $C(\nu) \neq \emptyset$, sea $S \in C$ fijo y considérese, para esta S:

$$\delta_T = \begin{cases} 1/\binom{n-1}{|T|-1} & \text{si } \mid T \mid = \mid S \mid \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Nótese que:

$$\mid \mathcal{B}(\delta_S) \mid = \binom{n}{\mid S \mid} \text{ y } \sum_{S \ni i} \delta_s = 1,$$

así, $\delta \in P$. Por el teorema de Shapley-Bondareva, $\sum_{T \in \mathcal{B}(\delta)} \delta_T \nu(T) \leq \nu(N)$ para todo $\delta \in P$, en particular para el anterior, así:

$$\sum_{T \in \mathcal{B}(\delta)} \delta_T \nu(T) = \binom{n}{\mid S \mid} / \binom{n-1}{\mid S \mid -1} \nu(S) = n/\mid S \mid \nu(S) \leq \nu(N).$$

que era lo que se quería demostrar.

b): Si $\nu(S)/\mid S \mid \leq \nu(N)/n$ para toda $S \in C$ entonces, con $x_i = \nu(N)/n, x \in C(\nu)$. Efectivamente:

i): $x(S) = \mid S \mid \nu(N)/n \geq \nu(S)$.

ii): $x(N) = n\nu(N)/n = \nu(N)$.

Proposición 25. *Si ν es un juego superaditivo con tres jugadores y [0,1]-normalizado*[4] *($\nu(N) = 1$ y $\nu(\{i\}) = 0, i \in N$) entonces el núcleo de ν es no vacío si y sólo si*

i): $\nu(\{i,j\}) \leq 1,\ \{i,j\} \subseteq N$.

ii): $\nu(\{1,2\}) + \nu(\{1,3\}) + \nu(\{2,3\}) \leq 2$.

Para terminar esta sección, se dará una propiedad que tiene el conjunto de juegos con n jugadores y núcleo no vacío.

Defínanse las operaciones algebraicas sobre juegos:

a): $(\nu + \omega)(S) = \nu(S) + \omega(S)$ para todo $\nu, \omega \in G$.

b): $(c\nu)(S) = c\nu(S)$ para todo $\nu \in G$ y $c \in R$.

Entonces se tiene:

Proposición 26. *Si $K = \{\nu \mid C(\nu) \neq \phi, n \text{ fijo}\}$ entonces K es un cono convexo.*

[4] Véase Owen (1982) para una demostración de que, si $\sum_{i \in N} \nu(\{i\}) \leq \nu(N)$ entonces se puede normalizar ν en forma única.

5. Conjuntos estables

Ya se ha hecho notar que en muchos tipos de juegos, el concepto de núcleo no proporciona la información necesaria para considerar que el juego esté resuelto. Esto puede suceder ya sea porque el núcleo sea vacío, porque las soluciones en el núcleo no sean satisfactorias o porque el núcleo es demasiado “grande”. Si el núcleo es vacío, uno de los caminos que quedan es tratar de relajar la condición de racionalidad de grupo. Esta idea es la que conduce al concepto de conjunto estable.

Definición 27. *Si $x, y \in \mathbf{R}^n$, se dirá que x domina a y por medio de S ($x \succeq_S y$) si y sólo si*

a): $x_i > y_i$ *para todo* $i \in S$.
b): $x(S) \leq \nu(S)$.

y se dirá que x domina a y ($x \succeq y$) si y sólo si existe S tal que $x \succeq_S y$.

Las definiciones “x domina a y vía S” y la de “y es bloqueada por S” prácticamente son las mismas y ambas tratan de caracterizar en qué casos y no es estable. Una enfatiza la coalición y, la otra el vector de pagos con el que se hace inestable a y. La diferencia entre una y otra es que cuando se trata de dominancia se exige que todos los jugadores en S mejoren, mientras que para bloquear basta que uno de ellos lo haga y los demás no empeoren. De aquí es fácil ver que si x domina a y, entonces y es bloqueado.

Proposición 28. *La imputación y está en el núcleo si y sólo si no existe vector de pagos que la domine.*

Demostración.

a): Supóngase $y \in C(\nu)$ y la existencia de una x y de una S tales que $x \succeq_S y$ entonces:
  i): De $x \succeq_S y$ se tiene que $\nu(S) \geq x(S) > y(S)$.
  ii): y de $y \in C(\nu)$, $y(S) \geq \nu(S)$.
  lo cual es una contradicción y por tanto x no domina a y.

b): Si $y \in X$ y $y \notin C(\nu)$, entonces existe S tal que $y(S) < \nu(S)$.
  Ahora, para x dada por:

$$x_i = \begin{cases} y_i + (\nu(S) - y(S))/ \mid S \mid & \text{si } i \in S \\ y_i & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

$x_i > y_i$ para toda $i \in S$ y

$$x(S) = y(S) + \mid S \mid [\nu(S) - y(S)]/ \mid S \mid = \nu(S),$$

es decir, x domina a y vía S.

Proposición 29. *Si ν es un juego superaditivo, entonces la imputación y está en el núcleo si y sólo si no existe una imputación que la domine.*

Demostración. La demostración es similar a la anterior con x definida por:

$$x_i = \begin{cases} y_i + (\nu(S) - y(S))/ \mid S \mid & \text{si } i \in S \\ \nu(\{i\}) + (\nu(N) - [\nu(S) + \sum_{i \notin S} \nu(\{i\})])/ \mid N \backslash S \mid & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

ya que x es una imputación.

De las proposiciones anteriores, para verificar si $y \in C(\nu)$, es condición necesaria y suficiente, el verificar si y no es dominada por algún vector de pagos. Si además ν es superaditivo, entonces basta con que no sea dominada por ninguna imputación. Sin el supuesto de superaditividad, lo que se tiene hasta ahora es que el núcleo corresponde al conjunto de imputaciones que no pueden ser dominadas por ningún vector de pagos: ($C(\nu) = \{y \mid y \text{ es } \succeq -\text{maximal } \}$). Para relajar esta condición, Von Neumann sugirió implícitamente que no es satisfactorio eliminar una imputación de las "soluciones aceptables", si la imputación que la domina es a su vez dominada.

Un conjunto estable $K \subseteq X$ (una solución Von Neumann–Morgenstern o simplemente una solución) de ν es un conjunto de imputaciones, ninguna de ellas dominada por un elemento de K y tal que para todo $y \notin K$ existe $x \in K$ que lo domina.

Este concepto de solución fue el primero[5] que se propuso para este tipo de juegos (siendo la razón por la cual en la literatura no se utiliza el concepto de solución en forma genérica; de no especificar otra cosa se sobre entiende que se refieren a este concepto de solución), y ha sido muy estudiado desde entonces.

Ahora bien, si se denota por:

$$\text{Dom } x = \{y \mid x \succeq y, y \in \mathbf{R}^n\}$$

$$\text{Dom } K = \cup_{x \in K} \text{Dom } x$$

se puede refrasear la definición de conjunto estable como:

Definición 30. *Se dirá que $K \subseteq X$ es un conjunto estable si y sólo si $K = X \backslash Dom\ K$.*

Proposición 31. *Un conjunto K es un conjunto estable de ν si y sólo si*

- **a):** *Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y (consistencia interna).*
- **b):** *Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que $x \succeq y$ (estabilidad externa).*

Demostración. Supóngase K un conjunto estable de ν, entonces

- **i):** Si $x \in K$ y $x \succeq y$ entonces, $y \in$Dom $x, y \notin X\backslash$Dom K; de donde $y \notin K$.
- **ii):** Ahora, si $y \notin K$, entonces $y \in$ Dom $K = \cup_{x \in K}$ Dom x, y por tanto existe $x \in K$ que domina a y.

Ahora supóngase un conjunto K que satisface las condiciones a) y b) de la proposición:

- **i):** Si $y \in K$ entonces por a) para toda $x \in K, x$ no domina a y, es decir $y \notin$ Dom K o lo que es lo mismo, $y \in X\backslash$Dom K, con lo que se concluye que $K \subseteq (X\backslash\text{Dom } K)$.
- **ii):** Por último, si $y \in X\backslash$Dom K, entonces $y \notin$Dom K o en forma equivalente y no es dominada por ningún elemento de K; por b), $y \in K$. De aquí $(X\backslash\text{Dom } K) \subseteq K$.

Nótese que si K es un conjunto estable y $x \in K$, puede existir $y \notin K$ que domine a x. Esto es lo que diferencia a los conceptos de núcleo y conjunto estable.

[5]Von Neumann en 1928.

Proposición 32. *Si $x, y \in X$ entonces x no puede dominar a y ni con una coalición que contenga a un solo jugador ni con la gran coalición.*

Demostración.

a): Si $x \succeq_{\{i\}} y$, entonces, $x_i > y_i$ y $x_i \leq \nu(\{i\})$, de donde $y_i < \nu(\{i\})$ y $y \notin X$.

b): Ahora bien, si $x \succeq_N y$, entonces $x_i > y_i$ para todo $i \in N$, por lo cual

$$\sum_{i \in N} x_i > \sum_{i \in N} y_i = \nu(N) \text{ y } x \notin X.$$

De aquí se desprende que en juegos bipersonales el único conjunto estable es X.

Proposición 33. *Si K es un conjunto estable entonces $C(\nu) \subseteq K$.*

Demostración. Si $x \in C(\nu)$, entonces x no es dominada por ninguna imputación, es decir $x \notin Dom(X)$, pero $Dom(K) \subseteq Dom(X)$. En esta forma, $x \notin Dom(K)$, de donde $x \in K$.

Esta última proposición dio lugar a la hipótesis de que el núcleo era la intersección de todos los conjuntos estables del juego, la que se mantuvo hasta que Lucas dio un contraejemplo en 1969.

Proposición 34. *Salvo por el caso trivial en que el conjunto de imputaciones tiene un solo elemento, cualquier conjunto estable contiene más de una imputación.*

Demostración. Supóngase un conjunto estable K con un solo elemento x y una imputación $y \neq x$. Primero, nótese que existe i tal que $x_i > \nu(\{i\})$, ya que si $x_j = \nu(\{j\})$ para toda $j \in N$, entonces $y_j \geq x_j$ para toda $j \in N$ y x no puede dominar a y.

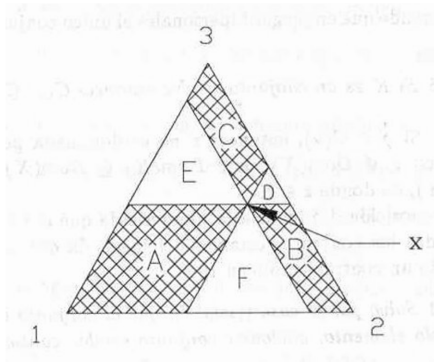
Ahora, para cualquier i fijo para el cual se cumpla que $x_i > \nu(\{i\})$, sea z definido por:

$$z_j = \begin{cases} x_j + [x_i - \nu(\{i\})]/(n-1) & \text{si } j \neq i \\ \nu(\{i\}) & \text{si } j = i \end{cases}$$

Es fácil ver que $z \in X$ y $z \notin K$, por lo que debe exitir S tal que $x \succeq_S z$, pero $x_j < z_j$ para $j \neq i$. Así la única coalición con la que x puede dominar a z es con $S = \{i\}$, pero eso es imposible por la proposición 3.14.

6. Conjuntos estables en forma gráfica

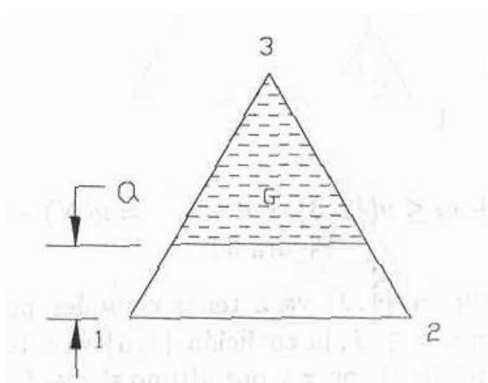
Al igual que en la sección 3.3, supóngase $\nu(\{i\}) = 0, i = 1, 2, 3, \nu(N) > 0$ y tómese un triángulo equilátero tal que la suma de las alturas asociadas a cualquier punto del triángulo sea $\nu(N)$. Como K es un conjunto estable si y sólo si $K = X \backslash \text{Dom } K$ importará saber cuándo es que $x \succeq_S y$. Por la proposición 3.14, basta para ello considerar los casos en los que $\mid S \mid = 2$. Además recuérdese que el núcleo siempre está contenido en cualquier conjunto estable.



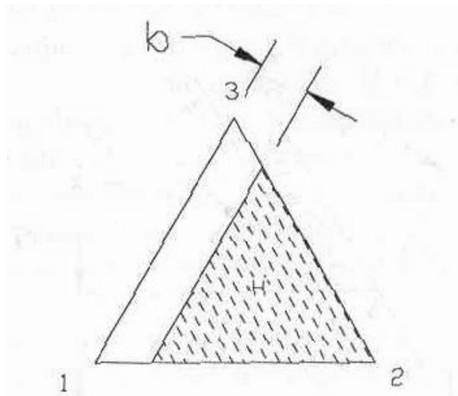
$A = \{y \mid x_i > y_i, i \in \{2,3\}\}$ $D = \{y \mid y_i > x_i, i \in \{2,3\}\}$
$B = \{y \mid x_i > y_i, i \in \{1,3\}\}$ $E = \{y \mid y_i > x_i, i \in \{1,3\}\}$
$C = \{y \mid x_i > y_i, i \in \{1,2\}\}$ $F = \{y \mid y_i > x_i, i \in \{1,2\}\}$
Figura 3.6

Nótese que los conjuntos A, B y C no contienen a sus caras interiores al triángulo, y sí contienen al resto de sus fronteras. La coalición $\{2,3\}$ tiene los incentivos (cada elemento de la coalición mejora) para dominar a cualquier imputación de A con x. Es decir, los jugadores de $S = \{2,3\}$ prefieren x a cualquier elemento en A. De la misma forma, la coalición $\{1,3\}(\{1,2\})$ tiene los incentivos para dominar con x a cualquier imputación en B (C).

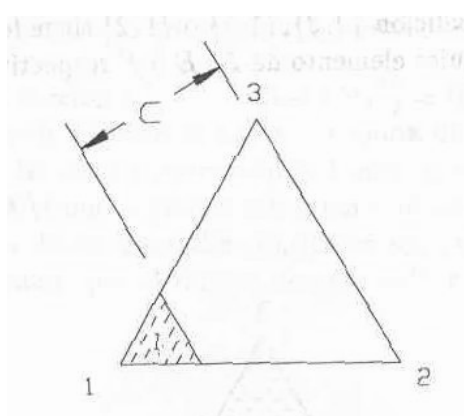
Por otro lado, la coalición $\{2,3\}, \{1,3\}$ o $\{1,2\}$ tiene los incentivos para dominar a x con cualquier elemento de D, E o F respectivamente.



$G = \{x \mid x_1 + x_2 \leq \nu(\{1,2\})\}$, donde $a = \nu(N) - \nu(\{1,2\})$
Figura 3.7



$H = \{x \mid x_1 + x_3 \leq \nu(\{1,3\})\}$, donde $b = \nu(N) - \nu(\{1,3\})$
Figura 3.8



$I = \{x \mid x_2 + x_3 \leq \nu(\{2,3\})\}$, donde $c = \nu(N) - \nu(\{2,3\})$
Figura 3.9

Si $x \in G$, la coalición $\{1,2\}$ va a tener el poder para dominar a los elementos de C con x; si $x \in H$, la coalición $\{1,3\}$ va a tener el poder para dominar a los elementos de B con x y por último si $x \in I$, la coalición $\{2,3\}$ va a tener el poder para dominar con x a cualquier imputación en A.

Así, si x está en G, x domina a los elementos de C vía la coalición $\{1,2\}$; si $x \in H$, x domina a los elementos de B vía $\{1,3\}$ y si $x \in I$, x domina a los elementos de A con la coalición $\{2,3\}$. Por ejemplo con:

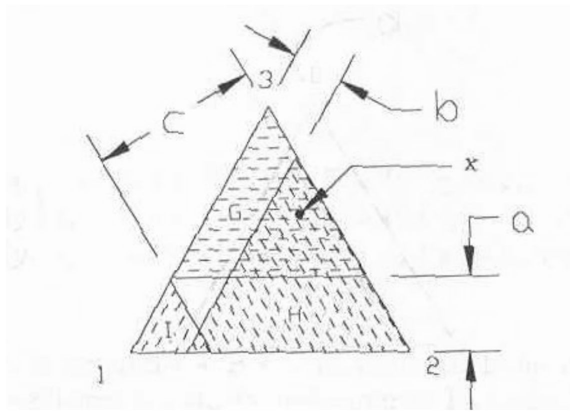


Figura 3.10

el conjunto de puntos que son dominados por x es $\{y \mid x \succeq y\} = B \cup C$, (los conjuntos D,E y F no son dominados por x, por falta de incentivos, mientras que la coalición $\{2,3\}$ carece de poder para dominar a los elementos de A).

A continuación se dan algunos ejemplos para analizar lo que pasa ya no con un solo punto, sino con un conjunto.

Ejemplo 3.9. Supóngase un juego con un núcleo lo suficientemente grande como para que intersecte las caras del triángulo.

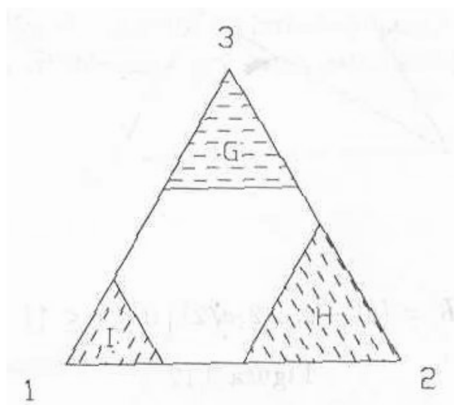


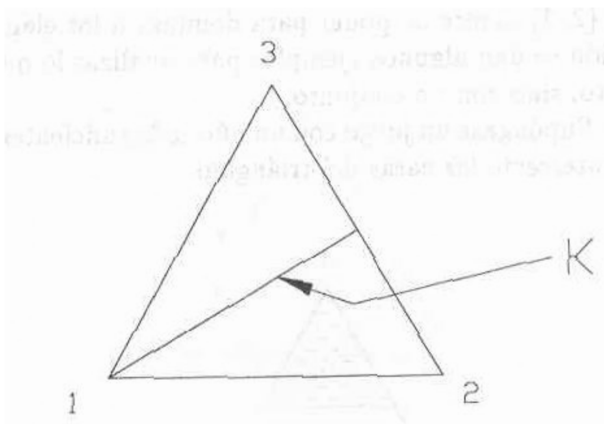
Figura 3.11

Nótese que con las imputaciones que forman la base del triángulo que define a G se domina a todo G (las cuales están en el núcleo de ν y por tanto en cualquier conjunto estable). Así , ningún punto de G puede estar en un conjunto estable. Lo mismo ocurre con H e I, con los elementos de su base interior se domina al conjunto correspondiente en su totalidad, de este modo el único candidato viable para ser conjunto estable es el núcleo. Efectivamente, con los elementos del núcleo se domina a todas las imputaciones fuera de él y por la proposición 3.12 ningún par de imputaciones en el núcleo se dominan entre sí. Así, el núcleo es el único conjunto estable en este tipo de juegos.

Shapley demostró en 1971 un resultado mucho más general que éste: si ν es un juego convexo (ver sección 3.8) entonces $C(\nu)$ es el único conjunto estable.

Ejemplo 3.10. Considere un mercado con un comprador y dos vendedores, es decir $\nu(\{1,2,3\}) = \nu(\{1,2\}) = \nu(\{1,3\}) = 1$ y $\nu(S) = 0$ en otro caso. En este juego

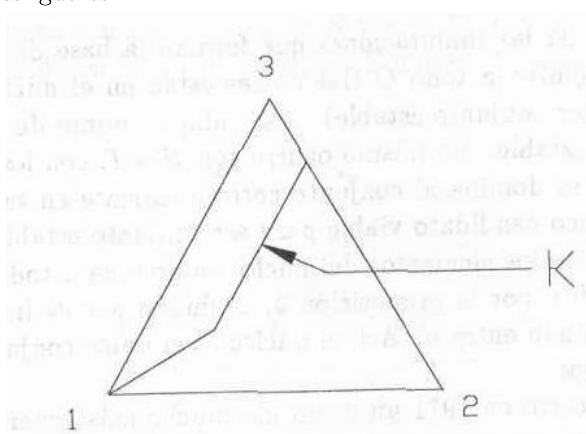
$G = H = X$, mientras que $I = \{(1,0,0)\}$. Como ejemplos de conjuntos estables se tienen:



$$K = \{(1-c, c/2, c/2) \mid 0 \leq c \leq 1\}$$

Figura 3.12

Los dos vendedores se unen y negocian con el comprador, lo que consigan lo dividen en partes iguales.

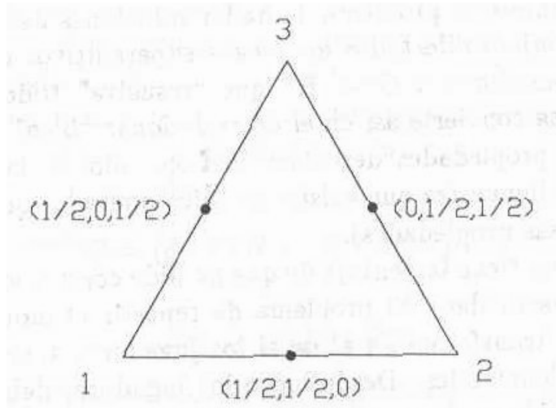


$$K = \{(1-c, c/2, c/2) \mid 1-2k \leq c \leq 1\} \cup \{(c, k, 1-c-k) \mid 0 \leq c \leq 1-2k\}$$

Figura 3.13

Mientras el jugador 2 no obtenga más de k se negocia como en el caso anterior, a partir de ahí se le da k al jugador 2 y se le excluye del juego, el resto lo negocian 1 y 3.

Ejemplo 3.11. Considérese un juego de mayoría simple: $\nu(\{1,2,3\}) = \nu(\{1,2\}) = \nu(\{1,3\}) = \nu(\{2,3\}) = 1$ y $\nu(\{i\}) = 0, i = 1,2,3$. Aquí G, H e I es cada uno de ellos el conjunto de imputaciones, y el núcleo del juego es vacío. Un conjunto estable para este juego está dado por:



$$K = \{(1/2, 1/2, 0), (1/2, 0, 1/2), (0, 1/2, 1/2)\}$$

Figura 3.14

Dos jugadores se unen y por mutuo acuerdo excluyen al tercero dividiéndose el todo en partes iguales. Otros conjuntos estables para este juego son:

$$K_1 = \{(x, 1 - x - c, c) \mid 0 \leq x \leq 1 - c\} \text{ para } c \in [0, 1/2]$$

$$K_2 = \{(c, x, 1 - x - c) \mid 0 \leq x \leq 1 - c\} \text{ para } c \in [0, 1/2]$$

$$K_3 = \{(1 - x - c, c, x) \mid 0 \leq x \leq 1 - c\} \text{ para } c \in [0, 1/2]$$

Durante varias décadas uno de los problemas típicos abiertos fue el de la existencia, o no existencia, de juegos sin conjuntos estables. Lucas lo resolvió en 1967, exhibiendo un juego con diez jugadores sin conjuntos estables, pero con núcleo vacío. Debido a que los conceptos de núcleo y conjunto estable se basan en principios similares, quedaba la posibilidad de que la causa de su no existencia fuese la misma. Sin embargo, dos años después el mismo Lucas dió un ejemplo sin conjuntos estables y con núcleo no vacío. Así, hay juegos sin conjuntos estables ni aun como conjuntos vacíos.

7. El Valor de Shapley

Shapley (1953), enfocó el problema de hallar soluciones de la siguiente manera: sea G el conjunto de todos los juegos superaditivos con n jugadores y defínase un operador $\varphi : G \to R^n$ que "resuelva" todos los juegos en G. El problema se convierte así en el de seleccionar "bien" a φ. Para ello, Shapley parte de propiedades"deseables" del operador φ, las que considera como axiomas, y demuestra que existe un único operador que satisface esos axiomas (posee esas propiedades).

Este mecanismo tiene la ventaja de que no pide condiciones a la solución de un juego en particular. El problema de repartir el monto que consiga cada coalición se transforma en el de si los jugadores aceptan o no "simples" supuestos elementales. Desde luego los jugadores deberán aceptar el resultado que de ellos se desprende, lo que, como ya se expuso en el caso de racionalidad de grupo, en muchas ocasiones dista de ser trivial. Para empezar a precisar esta idea, se define a continuación el concepto de solución.

Definición 35. *Por una solución φ sobre G se entenderá un operador $\varphi : G \to \mathbf{R}^n$.*

Estudiamos a continuación un conjunto de axiomas, similares a los que utiliza Shapley, a partir de los cuales se demostrarán la existencia y la unicidad de una solución para cada uno de los juegos en G. Estos axiomas se pueden ver como características deseables a satisfacer por toda solución que se considere admisible. Es fácil ver que el conjunto G es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales si se definen la suma y el producto sobre G como al final de la sección 3.4:

a): $(\nu + \omega)(S) = \nu(S) + \omega(S)$ para todo $\nu, \omega \in G$.
b): $(c\nu)(S) = c\nu(S)$ para todo $\nu \in G$ y $c \in R$.

Axioma de aditividad: $\varphi(\nu + \omega) = \varphi(\nu) + \varphi(\omega)$ para toda $\nu, \omega \in G$.

Nótese que como se definió $\nu + \omega$, lo que obtiene cada coalición es exactamente la suma de lo que obtiene en cada uno de los juegos originales y por lo tanto los jugadores no pueden obtener ventaja adicional por jugar los dos juegos en serie. Resulta natural pedir que lo que deba obtener cada jugador en el juego suma, sea exactamente la suma de lo que obtengan en los juegos originales.

Otra característica razonable que debería tener la solución es que no dependa de los atributos personales de los jugadores; en otras palabras, que sea anónima. Así, si los jugadores intercambian papeles en el juego y además cada coalición logra hacer exactamente lo mismo que la coalición a la que suplanta, entonces lo que debe obtener cada jugador en el nuevo juego es lo que obtenía el jugador al cual suplanta.

En lo sucesivo se denotará por:

$$\Theta = \{\theta \mid \theta : N \to N, \theta \text{ biyectiva}\}$$

y por

$$\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}.$$

Es decir, Θ contiene todos los órdenes totales que se pueden definir sobre el conjunto N, o si se quiere, a todas las permutaciones de los n jugadores. Sin embargo es mejor pensar en la primera interpretación, ya que al extender la teoría a un continuo de jugadores, el concepto de permutación no se generaliza fácilmente. De cualquier manera, cada θ se interpretará como un intercambio de papeles en el juego. En particular el jugador i pasará a tomar el papel del jugador $\theta(i)$. A continuación se define formalmente el significado de las frases "formar un juego intercambiando papeles" y el de "intercambiar pagos". Para cada pareja $(\theta, \nu) \in \Theta \times G$ se define un nuevo juego $\theta^*\nu$ por:

$$(\theta^*\nu)(\theta(S)) = \nu(S)$$

y para cada pareja $(\theta, x) \in \Theta \times R^n$ se define un nuevo vector en $R^n, \theta^* x$ donde su i–ésima coordenada está dada por:

$$(\theta^* x)_i = x_{\theta(i)}.$$

Estas definiciones se pueden interpretar como sigue: para $(\theta, \nu) \in \Theta \times G$ dado, se desea que $\theta^*\nu$ represente el juego después de que los jugadores hayan intercambiado papeles de acuerdo a θ. Como los jugadores en $\theta(S)$ suplantan a los que están en S, entonces lo que debe poder conseguir $\theta(S)$ en $\theta^*\nu$ es lo que podía conseguir

S en ν, es decir, $(\theta^*\nu)(\theta(S)) = \nu(S)$. Ahora, el pago que recibe el jugador $\theta(i)$ con $\theta^* x$ es el que recibía i con x.

Axioma de simetría: $\theta^*\varphi(\theta^*\nu) = \varphi(\nu)$ para todo $(\theta, \nu) \in \Theta \times G$.

Es decir, la solución φ es simétrica si y sólo si para cualquier $(\theta, \nu) \in \Theta \times G$, el monto que asigna φ a cada jugador i en $\nu, (\varphi_i(\nu))$, es el mismo que el que φ asigna al jugador que suplanta en ν a i, $(\varphi_{\theta(i)}(\theta^*\nu))$.

Ejemplo 3.12. Si $\theta(1) = 2, \theta(2) = 3$ y $\theta(3) = 1$ y ν es un juego con tres jugadores, entonces, se interpreta a θ como: 1 toma el lugar de 2, 2 toma el lugar de 3, 3 toma el lugar de 1 y

S	$\theta(S)$	$\theta^*\nu(\theta(S)) = \nu(S)$	i	$\theta(i)$	$(\theta^* x)_i = x_{\theta(i)}$
$\{1\}$	$\{2\}$	$\theta^*\nu(\{2\}) = \nu(\{1\})$	1	2	x_2
$\{2\}$	$\{3\}$	$\theta^*\nu(\{3\}) = \nu(\{2\})$	2	3	x_3
$\{3\}$	$\{1\}$	$\theta^*\nu(\{1\}) = \nu(\{3\})$	3	1	x_1
$\{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\theta^*\nu(\{2,3\}) = \nu(\{1,2\})$			
$\{1,3\}$	$\{1,2\}$	$\theta^*\nu(\{1,2\}) = \nu(\{1,3\})$			
$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	$\theta^*\nu(\{1,3\}) = \nu(\{2,3\})$			
$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\theta^*\nu(\{1,2,3\}) = \nu(\{1,2,3\})$			

Para el siguiente axioma, si $\varphi(\nu) = (\varphi_1(\nu), \ldots, \varphi_n(\nu))$ es el vector que le asocia φ a ν, se denota por:

$$\varphi(v)(S) = \sum_{i \in S} \varphi_i(\nu)$$

esto es, $\varphi(v)(S)$ es el monto que la coalición S obtiene con la solución φ.

Axioma de eficiencia: $\varphi(v)(N) = \nu(N)$ para todo $\nu \in G$.

En otras palabras, el monto $\varphi(v)(N)$ que se reparte entre todos los jugadores bajo φ es exactamente el monto $\nu(N)$ que puede conseguir la gran coalición.
Por último:

Definición 36. *Se dirá que i es un jugador nulo en ν si y sólo si $\nu(S \cup \{i\}) = \nu(S)$ para toda $S \subseteq N$.*

Axioma de nulidad: Si i es un jugador nulo en ν entonces $\varphi_i(v) = 0$.

Alguien que nada más observe el juego, debe ser excluido de la repartición.

Definición 37. *Por el Valor de Shapley entenderemos una solución sobre G que satisfaga los cuatro axiomas anteriores.*

Teorema 38. *(Shapley, 1953). Existe un único Valor de Shapley sobre G y está dado por:*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \mid S \mid ! (n - \mid S \mid -1)!/n! [\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)]$$

Demostración.

a) Existencia:

Basta demostrar que la solución propuesta satisface los cuatro axiomas anteriores. Aquí sólo se demuestra que satisface el axioma de simetría, los otros se dejan como ejercicio al lector. Hay que demostrar que si φ es la solución dada en el teorema, entonces $\varphi\theta * \nu = \theta^* \varphi(v)$ para todo $(\theta, \nu) \in \Theta \times G$. Sean θ y ν arbitrarias y supóngase además que $\theta(i) = j$; entonces,

$$(\theta^* \varphi(v))_i = \varphi_{\theta(i)}(\nu) = \varphi_j(\nu) =$$

$$= \sum_{S \subseteq N \setminus \{j\}} \mid S \mid!(n- \mid S \mid -1)!/n![\nu(S \cup \{j\}) - \nu(S)] =$$

$$= \sum_{\theta(S) \subseteq N \setminus \{j\}} \mid \theta(S) \mid!(n- \mid \theta(S) \mid -1)!/n![\nu(\theta(S) \cup \theta\{i\}) - \nu(\theta(S))]$$

$$= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \mid S \mid!(n- \mid S \mid -1)!/n![\theta^* \nu(S \cup \{i\}) - \theta^* \nu(S)]$$

$$= \varphi_i(\theta^* \nu).$$

b) Unicidad:

G es un espacio vectorial de dimensión $2^n - 1$. Es fácil ver que si:

$$\nu_R(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \subseteq S \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases}$$

entonces $B = \{\nu_R \mid R \subseteq N, R \neq \phi\}$ es una base para G.

Así, para cualquier juego dado ν, existen $\delta_R \in R$ únicos tales que

$$\nu = \sum_{\{R \mid \emptyset \neq R \subseteq N\}} \delta_R \nu_R$$

Sea φ cualquier Valor de Shapley entonces, por aditividad

$$\varphi(\nu) = \sum_{\{R \mid \emptyset \neq R \subseteq N\}} \varphi(\delta_R \nu_R)$$

Así, si el Valor de Shapley para cada $\delta_R \nu_R$ es único, el de ν también lo será y se habrá terminado la demostración.

Para demostrar la unicidad del Valor de Shapley para $\delta_R \nu_R$ nótese que:

a): Si $i \notin R$ entonces i es un jugador nulo en ν_R.

b): $(\delta_R \nu_R)(N) = \delta_R$.

c): Si $i, j \in R$ y θ es tal que $\theta(i) = j$ y $\theta(R) = R$, entonces, por el axioma de simetría:

$$\varphi_i(\theta^* \nu_R) = \varphi_{\theta(i)}(\nu_R) = \varphi_j(\nu_R)$$

y como $\nu_R = \theta^* \nu_R$ por la forma particular en que se tomó θ

$$\varphi_i(\theta^* \nu_R) = \varphi_i(\nu_R)$$

de donde:

$$\varphi_i(\nu_R) = \varphi_j(\nu_R)$$

Con esto, si φ satisface los últimos 3 axiomas, el único valor posible para $\delta_R \nu_R$ es:

$$\varphi_i(\delta_R \nu_R) = \begin{cases} \delta_R / \mid R \mid & \text{si } i \in R \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

La solución $\varphi_i(\nu) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \mid S \mid!(n - \mid S \mid -1)!)/n![\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)]$ es un "compromiso razonable" para cada uno de los jugadores. Para comprender mejor su significado considérese el siguiente proceso aleatorio:

a): Se elige la cardinalidad de una coalición que no contenga al jugador i de acuerdo a una distribución uniforme sobre el conjunto $\{0, \ldots, n-1\}$.

b): Se elige aleatoriamente una coalición S con la cardinalidad dada en a), de acuerdo a una distribución uniforme sobre las $\binom{n-1}{|S|}$ coaliciones disponibles.

c): Se le da al jugador i la utilidad marginal que aporta a $\nu(N)$ al incorporarse a S, es decir, $\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)$.

entonces, $\varphi_i(v)$ es el pago esperado para el jugador i en este proceso.

Otra expresión para $\varphi_i(\nu)$ es:

$$\varphi_i(\nu) = 1/n!(\sum_{\mathcal{R}} (\nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}))$$

donde $P_i^{\mathcal{R}}$ es el conjunto de jugadores que preceden a i en el orden R. Para ver que estas expresiones son iguales, sólo hay que notar que

$$\mid \{\mathcal{R} \mid \mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} = S\} \mid = \mid S \mid!(n - \mid S \mid -1)!$$

Con esta expresión, si se elige al azar un orden R de N con una distribución uniforme sobre los $n!$ órdenes posibles y se le da al jugador i la utilidad marginal que aporta a $\nu(N)$ cuando se incorpora a los jugadores que lo preceden, $(\nu(P_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(P_i^{\mathcal{R}}))$, entonces, $\varphi_i(\nu)$ es el pago esperado que obtiene i.

Ejemplo 3.13. Considérese la siguiente gráfica:

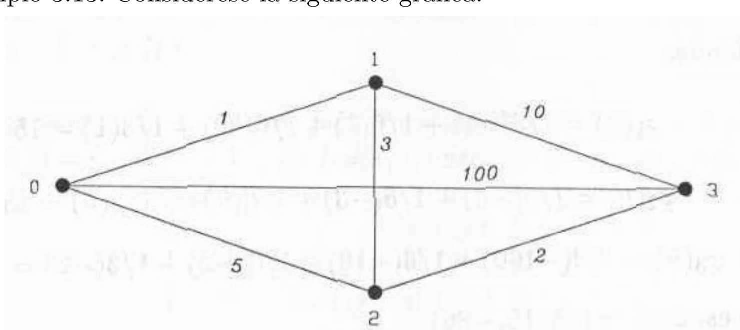


Figura 3.15

y supóngase que cada uno de los nodos (jugadores) 1, 2 y 3, se necesitan conectar al nodo 0. Los costos por arista se dan en la gráfica. Se puede pensar, por ejemplo, en una red telefónica, cablevisión, etc. La solución óptima es la dada por el mínimo árbol que conecta la gráfica, pero, ¿cuánto debe pagar cada nodo por su conexión? A continuación se plantea de dos formas distintas el problema y en ambos casos se aplica el Valor de Shapley para dar una solución.

a): Si se supone que, para una coalición dada, el costo de conectar a cada nodo en la coalición es el costo asociado al mínimo árbol que conecta S a 0 sin utilizar los nodos fuera de S, entonces,

$\nu(\{1\}) = -1$ $\quad \nu(\{2\}) = -5$ $\quad \nu(\{3\}) = -100$
$\nu(\{1,2\}) = -4$ $\quad \nu(\{1,3\}) = -11$ $\quad \nu(\{2,3\}) = -7$
$\nu(\{1,2,3\}) = -6$

y utilizando la expresión del teorema de Shapley:

		$\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)$		
S	$\mid S \mid!(n- \mid S \mid -1)!/n!$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$\emptyset$	$1/3$	-1	-5	-100
$\{1\}$	$1/6$	-	-3	-10
$\{2\}$	$1/6$	1	-	-2
$\{3\}$	$1/6$	89	93	-
$\{1,2\}$	$1/3$	-	-	-2
$\{1,3\}$	$1/3$	-	5	-
$\{2,3\}$	$1/3$	1	-	-

de donde:

$$\varphi_1(\nu) = 1/3(-1) + 1/6(1) + 1/6(89) + 1/3(1) = 15$$

$$\varphi_2(\nu) = 1/3(-5) + 1/6(-3) + 1/6(93) + 1/3(5) = 15$$

$$\varphi_3(\nu) = 1/3(-100) + 1/6(-10) + 1/6(-2) + 1/3(-2) = -36$$

esto es, $\varphi(\nu) = (15, 15, -36)$.

En este caso, el Valor de Shapley refleja la necesidad que el jugador 3 tiene de entrar en una coalición.

b): El mismo planteamiento que en a), pero ahora suponiendo que cada coalición puede utilizar libremente cualquier nodo para conectarse:

$\nu(\{1\}) = -1$ $\quad \nu(\{2\}) = -4$ $\quad \nu(\{3\}) = -6$
$\nu(\{1,2\}) = -4$ $\quad \nu(\{1,3\}) = -6$ $\quad \nu(\{2,3\}) = -6$
$\nu(\{1,2,3\}) = -6$

ahora utilizando la fórmula, $\varphi_i(\nu) = 1/n! \sum_{\mathcal{R}}(\nu(P_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(P_i^{\mathcal{R}}))$:

	$\nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})$		
$\mathcal{R}$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
1 2 3	-1	-3	-2
1 3 2	-1	0	-5
2 1 3	0	-4	-2
2 3 1	0	-4	-2
3 1 2	0	0	-6
3 2 1	0	0	-6
	-2	-11	-23

de donde $\varphi(\nu) = (-1/3, -11/6, -23/6)$.

Ahora se establecen algunas formas alternativas que puede tomar el sistema de axiomas:

a) Si se definen jugadores substitutos como:

Definición 39. *Se dirá que i y j son jugadores substitutos en ν si y sólo si para toda $S \subseteq N \backslash \{i,j\}, \nu(S \cup \{i\}) = \nu(S \cup \{j\})$.*

Proposición 40. *Si i y j son jugadores substitutos en ν y φ es simétrico entonces $\varphi_i(\nu) = \varphi_j(\nu)$.*

Demostración. Si i y j son jugadores substitutos en ν y θ es tal que $\theta(i) = j, \theta(j) = i$ y $\theta(k) = k$ para $k \neq i, j$, entonces $\theta^*\nu = \nu$ ya que

$$\theta(S) = \begin{cases} S & \text{si } i, j \in S \text{ o } i, j \notin S \\ (S\backslash\{i\}) \cup \{j\} & \text{si } i \in S \text{ y } j \notin S \\ (S\backslash\{j\}) \cup \{i\} & \text{si } i \notin S \text{ y } j \in S \end{cases}$$

de donde, si por ejemplo se da el segundo caso:

$$\theta^*\nu(S) = \nu(\theta(S)) = \nu((S\backslash\{i\}) \cup \{j\}) = \nu((S\backslash\{i\}) \cup \{i\}) = \nu(S).$$

Así, como φ es simétrico,

$$\theta^*\varphi(v) = \varphi(\theta^*\nu) = \varphi(\nu)$$

y

$$\varphi_i(\nu) = (\theta^*\varphi(v))_i = \varphi_{\theta(i)}(\nu) = \varphi_j(\nu).$$

Siguiendo la demostración del teorema de Shapley, se puede observar que la simetría se utiliza únicamente para que jugadores substitutos obtengan el mismo pago. Se puede cambiar el axioma de simetría por el siguiente

Axioma. Si i y j son jugadores substitutos en ν entonces $\varphi_i(\nu) = \varphi_j(\nu)$.

b) Si se redefine jugador nulo, también se puede cambiar el axioma de nulidad:

Definición 41. *Se dirá que i es un jugador nulo si y sólo si $\nu(S \cup \{i\}) = \nu(S) + \nu(\{i\})$ para todo S que no contenga a i.*

Así, el axioma de nulidad puede ser substituido por el siguiente

Axioma. Si i es un jugador nulo entonces $\varphi_i(v) = \nu(\{i\})$.

Nótese que este axioma implica al anterior de nulidad, lo que permite hacer el cambio sin mayor problema.

Hay dos supuestos implícitos en la teoría anterior, conocidos en la literatura como los de pagos laterales y tretas fijas. El primero requiere que los pagos sean arbitrariamente divisibles y la segunda presupone alguna autoridad o equivalente que haga respetar el acuerdo. Tal como se planteó el teorema de Shapley, sólo quedan resueltos los juegos superaditivos; sin embargo, el teorema sigue siendo válido si G representa el conjunto de juegos con espacio de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$. Más aún, la demostración que se dio sigue siendo válida; el inconveniente es que el axioma de eficiencia difícilmente se puede respaldar. Si se tiene una partición $P = \{S_1, \ldots, S_r\}$ de N, con la que se obtiene más que $\nu(N)$, es decir, si

$$\sum_{i=1}^{n} \nu(S_j) > \nu(N)$$

lo que se recomienda es aplicar el Valor de Shapley en cada uno de los subjuegos que resultan de restringir ν a cada S_j.

Tanto el conjunto de axiomas como el espacio donde se aplican determinan el valor del juego: por ejemplo, no existe un valor que satisfaga los cuatro axiomas en el espacio de todos los juegos (dejando libre el número de jugadores). Esto no es muy satisfactorio, ya que si se acepta pedir condiciones de regularidad a unos juegos, no hay razón a priori, para no pedírselas a otros.

Por último, si ciertos jugadores deciden jugar un juego $\nu \in G$, les resultan relativamente poco relevantes los axiomas de linealidad y simetría; les debe importar poco la relación que su solución guarde con la de otros juegos. Sin embargo, los axiomas aludidos están indudablemente determinando el resultado que esos jugadores obtienen al jugar.

8. Juegos convexos

El Valor de Shapley no siempre es un elemento del núcleo. Por ejemplo, para un juego de mercado donde el jugador 1 es comprador y los jugadores 2 y 3 son vendedores, se tiene que $C(\nu) = \{(1,0,0)\}$ y $\varphi(v) = (2/3, 1/6, 1/6)$. En esta sección se caracteriza parcialmente al conjunto de juegos para los que $\varphi(v) \in C(\nu)$.

Definición 42. *Se dirá que ν es un juego convexo si y sólo si $\nu(S) + \nu(T) \leq \nu(S \cup T) + \nu(S \cap T)$ para todo $S, T \subseteq N$.*

Para cada $\theta \in \Theta$ y $i \in N$, sea $x_i^\theta(\nu) = \nu(P_i^\theta \cup \{i\}) - \nu(P_i^\theta)$. Se denotará por $x^\theta(\nu)$ al vector en R^n, cuya i–ésima coordenada es $x_i^\theta(\nu)$.

Definición 43. *Un juego ν satisface ganancias crecientes con respecto al tamaño de la coalición si y sólo si para $S, T \subseteq N$ y $j \in N$ tales que $S \subseteq T \subseteq N \backslash \{j\}$ se sigue que $\nu(T \cup \{j\}) - \nu(T) \geq \nu(S \cup \{j\}) - \nu(S)$.*

Teorema 44. *Las siguientes cuatro condiciones sobre ν son equivalentes:*

- **a):** *El juego ν es convexo.*
- **b):** *Para $S, T, R \subseteq N$ cualesquiera, tales que $S \subseteq T \subseteq N \backslash R$, se tiene que $\nu(T \cup R) - \nu(T) \geq \nu(S \cup R) - \nu(S)$.*
- **c):** *El juego ν satisface ganancias crecientes con respecto al tamaño de la coalición.*
- **d):** *Para toda $\theta \in \Theta, x^\theta(\nu) \in C(\nu)$.*

Demostración.

- *a)* $\Rightarrow$ *b)***:** Basta aplicar la definición de juego convexo a los conjuntos $S \cup R$ y T.
- *b)* $\Rightarrow$ *c)***:** La demostración es directa al tomar $R = \{i\}$.
- *c)* $\Rightarrow$ *d)***:** Sea $\theta \in \Theta$ arbitrario. Entonces
  - **i):** $x^\theta(\nu)$ es racional de grupo, ya que:

$$\sum_{i \in S} x_i^\theta(\nu) = \sum_{i \in S} \nu(\mathcal{P}_i^\theta \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^\theta)$$

y si $S_i^\theta = P_i^\theta \cap S$, entonces $S_i^\theta \subseteq P_i^\theta \subseteq N \backslash \{i\}$ y aplicando *c)* se tiene que:

$$\geq \sum_{i \in S} \nu(S_i^\theta \cup \{i\}) - \nu(S_i^\theta) = \sum_{i \in S} \nu(S_i^\theta \cup \{\theta(i)\}) - \nu(S_i^\theta) = \nu(S)$$

.

ii): $x^\theta(\nu)$ es eficiente, ya que:

$$\sum_{i\in N} x_i^\theta(\nu) = \sum_{i\in N} \nu(\mathcal{P}_i^\theta \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^\theta) = \sum_{\theta(i)\in N} \nu(\mathcal{P}_i^\theta \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^\theta)$$
$$= \nu(N).$$

d) $\Rightarrow$ *a)***:** Sean $S, T \subseteq N$ arbitrarias, si $S\cap T = \{j_1, \ldots, j_r\}, T\backslash S = \{j_{r+1}, \ldots, j_t\}$ $S\backslash T = \{j_{t+1}, \ldots, j_s\}$ y $N\backslash(S\cup T) = \{j_{s+1}, \ldots, j_n\}$ sea $\theta(j_i) = i$, entonces:

$$\sum_{i\in S} x_i^\theta(\nu) = \sum_{j_i\in S} x_{j_i}^\theta(\nu) = \sum_{j_i\in S} \nu(\mathcal{P}_{j_i}^\theta \cup \{j_i\}) - \nu(\mathcal{P}_{j_i}^\theta)$$
$$= \sum_{i=1}^{r} [\nu(\{j_1, \ldots, j_i\}) - \nu(\{j_1, \ldots, j_{i-1}\})] +$$
$$\sum_{i=t+1}^{s} [\nu(T \cup \{j_{t+1}, \ldots, j_i\}) - \nu(T \cup \{j_{t+1}, \ldots, j_{i-1}\})]$$
$$= \nu(\{j_1, \ldots, j_r\}) - \nu(\emptyset) + \nu(T \cup \{j_{t+1}, \ldots, j_s\}) - \nu(T)$$
$$= \nu(T \cap S) + \nu(S \cup T) - \nu(T) \geq \nu(S).$$

donde la última desigualdad se da porque $x^\theta(\nu) \in C(\nu)$.

COROLARIO 45. *Si ν es un juego convexo entonces $C(\nu) \neq \phi$.*

TEOREMA 46. *Si un juego es convexo entonces el Valor de Shapley está en el núcleo.*

Demostración. Como el núcleo de un juego es un conjunto convexo (ver ejercicio 3.9.3), $x^\theta(\nu) \in C(\nu)$ para toda $\theta \in \Theta$, por el inciso d) del teorema anterior y $\varphi(v) = 1/n! \sum_{\theta\in\Theta} x^\theta(\nu)$ se tiene que $\varphi(v) \in C(\nu)$.

TEOREMA 47. *Si ν es un juego convexo entonces $C(\nu)$ es el único conjunto estable.*

Demostración. Primero se demostrará que $C(\nu)$ es un conjunto estable utilizando la proposición 3.13.

Si $x \in C(\nu)$ entonces por la proposición 3.11 $x \notin \mathrm{Dom}(C(\nu))$, de donde $x \in X\backslash\mathrm{Dom}(C(\nu))$.

Y si $y \notin C(\nu)$, entonces existe S tal que $y(S) < \nu(S)$; elija S tal que $y(S) < \nu(S)$ y si $R \subseteq S$ entonces $y(R) \geq \nu(R)$. Sean $T \subseteq N$ arbitrario y θ cualquier orden donde primero aparecen los elementos de $S\backslash T$, después los de $S \cap T$, luego los de $T\backslash S$ y los restantes al último. Ahora, para x definida por:

$$x_i = \begin{cases} y_i + (\nu(S) - y(S))/\mid S \mid & \text{si } i \in S \\ \nu(\mathcal{P}_i^\theta \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^\theta) & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

claramente x domina a y vía S, y sólo resta demostrar que $x \in C(\nu)$,

$$x(T) = x(T \cap S) + x(T\backslash S)$$
$$= x(T \cap S) + \nu(S \cup T) - \nu(S)$$
$$\geq x(T \cap S) + \nu(T) - \nu(S \cap T) \geq \nu(T)$$

la primera igualdad por la forma en que se eligió θ, la primera desigualdad porque ν es convexo, y la segunda por la forma en que se eligió S.

La unicidad es directa, ya que cualquier conjunto estable contiene al núcleo, al ser $C(\nu)$ conjunto estable, con sus elementos se domina a su complemento de tal manera que la estabilidad interna sólo la puede tener $C(\nu)$.

9. Ejercicios

1. Considere un juego con más de tres jugadores tal que $\nu(N) > 0$ y $\nu(N\backslash\{1\}) = \nu(N\backslash\{2\}) = \nu(N\backslash\{3\}) = \nu(N)$ y $\nu(S) = 0$ para cualquier otra coalición. ¿Cuál es el núcleo de ν ?

2. Si ν y ω son dos juegos sobre N con núcleo no vacío, demuestre que $C(\nu)+C(\omega) \subseteq C(\nu+\omega)$ y pruebe o refute la otra inclusión.

3. Demuestre que el núcleo de un juego es un conjunto convexo.

4. ¿La superaditividad del juego es una condición necesaria para la no vacuidad del núcleo ?

5. Demuestre que si $\nu(S) = \min\ \{| M_1 \cap S |, | M_2 \cap S |\}$ en donde $M_1 \cap M_2 = \phi, N = M_1 \cup M_2$ y $| M_1 |=| M_2 |= m$, entonces,

$$C(\nu) = \{(\alpha, \ldots, \alpha, 1-\alpha, \ldots, 1-\alpha) \in X \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Es decir, que el núcleo es el conjunto de imputaciones en las cuales todos los jugadores en $M_i (i = 1, 2)$ obtienen lo mismo.

6. Demuestre que para cada vector δ de pesos balanceadores existe una familia $\{\gamma\}$ de vectores de pesos balanceadores minimales tales que: $B(\delta) = \cup B(\gamma)$.

7. Demuestre que un juego simple superaditivo tiene núcleo no vacío si y sólo si tiene al menos un jugador vetador.

8. Para el juego

$$\nu(\{1,2,3\}) = 1,\ \nu(\{1,2\}) = 1/2,\ \nu(\{1,3\}) = 2/3,\ \nu(\{2,3\}) = 1/4$$

y $\nu(\{i\}) = 0$, $i = 1, 2, 3$:

a): Grafique los siguientes conjuntos de imputaciones tomando $x = (\frac{1}{12}, \frac{9}{24}, \frac{13}{24})$:
- *i)***:** $\{y \mid x \succeq_{\{1,2\}} y\}$.
- *ii)***:** $\{y \mid x \succeq_{\{1,3\}} y\}$.
- *iii)***:** $\{y \mid x \succeq_{\{2,3\}} y\}$.
- *iv)***:** $\{y \mid x \succeq y\}$.

b): ¿Poseen consistencia interna los siguientes conjuntos?
- *i)***:** $\{(\alpha, \frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2}) \mid 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3}\}$.
- *ii)***:** $\{(\alpha, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} - \alpha) \mid 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3}\}$.

c): Encuentre al menos un conjunto estable para este juego.

9. Demuestre la proposición 3.12, incluyendo el que la x sugerida es una imputación.

10. Muestre un conjunto estable para el juego

$$\nu(\{1,2,3\}) = 1,\ \nu(\{1,2\}) = 1/3,\ \nu(\{1,3)\} = 1,\ \nu(\{2,3\}) = 2/3$$

y $\nu(\{i\}) = 0$ para $i = 1,2,3$.

11. Sea K un conjunto estable. Demuestre que si x es tal que:

a): $x_i \geq \nu(\{i\}), i \in N$
b): $x(N) \leq \nu(N)$
c): $x \notin K$

entonces existe $y \in K$ tal que $y \succeq x$. Nótese que x, no es necesariamente una imputación.

CAPÍTULO 2

Valores y soluciones

1. Algunos antecedentes

El artículo de Shapley de 1953 ha impulsado una gran cantidad de nuevas investigaciones. En este capítulo se abordan algunos resultados nuevos, tratando de enmarcar unas cuantas de las líneas de investigación actual sobre el tema.

Algunos de los trabajos recientes se han enfocado a la reformulación axiomática del Valor de Shapley porque consideran insatisfactorio uno o varios de sus axiomas; posiblemente el más atacado haya sido el axioma de aditividad. En la sección 4.2 se expone un trabajo de Young que prescinde de él. Otros se han ocupado del espacio de juegos. Como la interrelación de las soluciones de los juegos en G (a través de los axiomas) es la que determina el valor, al agrandar G no necesariamente existe valor en el espacio extendido, ni al reducirlo se preserva necesariamente la unicidad. Así, en aplicaciones donde el espacio de juegos "natural" no es G, se pierde un argumento para utilizar el Valor de Shapley. En la sección 4.5 se presenta un trabajo de Myerson que generaliza el Valor de Shapley y cuya solución sólo depende del juego y sus subjuegos.

Otra línea importante es la axiomatización de otro tipo de soluciones. Por ejemplo, Lehrer en 1988 axiomatiza el índice de Banzhaf–Coleman (véase sección 4.3); Kalai y Samet el Valor de Shapley ponderado en 1987 y, en 1981, Dubey, Neyman y Weber caracterizan todos los semivalores sin eficiencia.

Entre las generalizaciones que se han dado, resalta por su importancia teórica la hecha por Aumann y Shapley en 1974, demostrando la existencia y la unicidad del valor para diferentes espacios de juegos con un continuo de jugadores. El libro de Aumann y Shapley por sí solo ha dado pie a una rama sumamente fértil de trabajos en Teoría de Juegos y en Economía teórica. Por desgracia este tema no se podrá abordar en el presente libro, ya que su nivel matemático es considerablemente más avanzado del que se está suponiendo aquí.

Por último, y no por ello menos importante, está la clase de trabajos que retoman la metodología de Shapley. Cuando se desea aplicar algún concepto de valor a la solución de un problema de otra disciplina, se vuelve necesario la reinterpretación, en el lenguaje de la disciplina correspondiente, del significado de los axiomas y de los conceptos de Teoría de Juegos involucrados. Esto ha motivado a diferentes autores, como es el caso de Samet y Tauman (1982) o de Dubey (1982), a formular desde un inicio, el concepto de *valor* en la otra disciplina. Así, se reemplaza a G por el espacio de problemas que resulta de variar los parámetros y/o la información que define al problema. Se define un espacio S de soluciones y se establece un conjunto de axiomas en el lenguaje de la disciplina, que determinen en forma única al operador:

$$\varphi : G \to S.$$

Esta idea se trabaja en la sección 4.5.

2. El Valor de Shapley bajo otros axiomas

En esta sección se caracteriza el Valor de Shapley sin acudir a los supuestos de aditividad y nulidad; a cambio se pide un axioma de monotonía. Sea:

$$\nu^i(S) = \begin{cases} \nu(S) - \nu(S\backslash\{i\}) & \text{si } i \in S \\ \nu(S \cup \{i\}) - \nu(S) & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

la contribución marginal de i a S.

Axioma de monotonía fuerte.

Se dirá que φ es fuertemente monótona si y sólo si cada vez que se tengan juegos $\nu, w \in G$ tales que $\nu^i(S) \geq w^i(S)$ para toda $S \subseteq N$ entonces $\varphi_i(\nu) \geq \varphi_i(w)$.

Lo que pide el axioma es que si un juego cambia en tal forma que la contribución marginal de algún jugador a todas las coaliciones no decrezca, entonces la asignación a ese jugador no debe decrecer. Esta propiedad ofrece un soporte al uso del Valor de Shapley en aplicaciones donde el juego cambia, por ejemplo, en la división de beneficios o costos de una empresa entre los socios cuando ésta evoluciona en el tiempo.

LEMA 48. *Si φ es fuertemente monótona, satisface eficiencia, simetría y $\nu^i(S) = 0$ para todo $S \subseteq N$ entonces $\varphi_i(\nu) = 0$.*

Demostración. Como φ es fuertemente monótona, si $\nu^i(S) = w^i(S)$ para toda $S \subseteq N$, entonces

(1) $$\varphi_i(\nu) = \varphi_i(w)$$

Por otro lado, si $v \equiv 0$ entonces por simetría y eficiencia $\varphi_i(v) = 0$ para todo $i \in N$.

Y como $\nu^i(S) = v^i(S)$ para toda $S \subseteq N$ por (4.1), $\varphi_i(\nu) = 0$.

TEOREMA 49. *(Young). El Valor de Shapley es la única solución fuertemente monótona que satisface simetría y eficencia.*

Demostración. Como el Valor de Shapley satisface los axiomas de simetría y eficiencia y trivialmente es fuertemente monótono, la existencia queda demostrada. Ahora, $\{\nu_R \mid \emptyset \neq R \subseteq N\}$ forma una base para G, para cada $\nu \in G$ exiten $\{c_R\}_{R\subseteq N}$ únicos tales que:

(2) $$\nu = \sum_{\emptyset \neq R \subseteq N} c_R \nu_R$$

La unicidad se demuestra haciendo ver que el Valor de Shapley es el único operador con las caraterísticas que supone el teorema. Para ello, se utiliza la expresión del Valor de Shapley:

(3) $$\varphi_i(\nu) = \sum_{R \ni i} c_R / \mid R \mid$$

Sea m el número de términos no cero en la combinación lineal dada por (4.2). La demostración se hace por inducción matemática sobre m.

Supóngase $m = 1$, es decir $\nu = c_R \nu_R$. Si $i \notin R$ entonces $\nu^i(S) = 0$ para toda $S \subseteq N$ y por el lema anterior $\varphi_i(\nu) = 0$. Mientras que si $i \in R$ aplicando simetría y eficiencia se obtiene que $\varphi_i(\nu) = c_R / \mid R \mid$.

Ahora supóngase que $\varphi(\nu)$ es el Valor de Shapley para juegos donde su índice sea a lo más m y sean

$$\nu = \sum_{k=1}^{m+1} c_{R_k} \nu_{R_k} \text{ con } c_{R_k} \neq 0 \text{ para toda } k.$$

$$R = \cap_{k=1}^{m+1} R_k$$

a): si $i \notin R$, sea $w = \sum_{R_k \ni i} c_{R_k} \nu_{R_k}$, como $i \notin R$ el índice de w es a lo más m y como $w^i(S) = \nu^i(S)$ para toda $S \subseteq N$ se tiene que

$$\varphi_i(\nu) = \varphi_i(w) = \sum_{R_k \ni i} c_{R_k} / \mid R_k \mid$$

donde la primera igualdad es por (4.1) y la segunda por hipótesis de inducción.

b): si $i \in R$, entonces se tiene por el inciso anterior que los jugadores que no estan en R obtienen de acuerdo al Valor de Shapley, mientras que los que si están obtienen lo mismo (basta volver a aplicar simetría para obtenerlo). Este valor común, por eficiencia, también tiene que ser el valor de Shapley.

3. Valor de Banzhaf-Coleman

Otro de los valores que por varios años se trató de axiomatizar es el Valor de Banzhaf–Coleman. Owen (1982) propone una axiomatización que no lo determina unívocamente. Dubey y Shapley (1979) establecen algunas de sus propiedades. La axiomatización que se presenta en esta sección se debe a Lehrer (1988).

En esta sección se denotará por G al conjunto de todos los juegos, aun variando el número de jugadores y por G_S al conjunto de los juegos simples.

Definición 50. *Para $T \subseteq N$, con $\mid N \mid = n$, el juego T-unanimidad, denotado por u_T^n, se define por $u_T^n(S) = 1$ si $T \subseteq S$ y $u_T^n(S) = 0$ de otra forma.*

Definición 51. *Para $T \subseteq N$ y $k \leq \mid T \mid$, el juego k-T simétrico, denotado por w_T^k, se define por:*

$$w_T^{k,n}(R) = \begin{cases} 1 & si \mid T \cap R \mid \geq k \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

Para cada coalición $T \subseteq N$ se deriva un juego ν_T amalgamando los jugadores de T en uno solo; a este jugador se le llamará T'. El espacio de jugadores para ν_T es $N \backslash T \cup \{T'\}$, y se define por:

$$\nu_T(S) = \nu(S)$$

$$\nu_T(S \cup \{T'\}) = \nu(S \cup T)$$

donde $S \subseteq N \backslash T$.

Axioma de reducción. $\phi_i(\nu) + \phi_j(\nu) \leq \phi_{T'}(\nu_T)$ para cualquier coalición $T = \{i, j\}$ de dos jugadores.

El axioma de reducción dice que para cualquier coalición de dos jugadores $T = \{i, j\}$ la suma de los valores de i y j en el juego original es menor o igual al valor de T' en el nuevo juego. De acuerdo a este axioma la unificación de cualesquiera dos jugadores es productiva. El Valor de Banzhaf–Coleman para el jugador i correspondiente al juego ν con n jugadores es el siguiente:

$$\phi_i(\nu) = 1/2^{n-1} \sum_{S \subseteq N} [\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)]$$

En un juego simple, el Valor de Banzhaf–Coleman del jugador i, es el número de coaliciones perdedoras que se vuelven ganadoras cuando se les incorpora el jugador i, dividido entre el número de coaliciones que no lo contienen (incluyendo al vacío), con el fin de que el valor quede entre 0 y 1. La expresión anterior es una forma de generalizar esta idea.

LEMA 52. *Si ϕ es el Valor de Banzhaf–Coleman, entonces $\phi_i(\nu) + \phi_j(\nu) = \phi_{T'}(\nu_T)$ para toda coalición $T = \{i, j\}$.*

Demostración.

$$2^{n-1}(\phi_i(\nu) + \phi_j(\nu)) = \sum_{S \subseteq N} [\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)] + \sum_{S \subseteq N} [\nu(S \cup \{j\}) - \nu(S)] =$$

$$= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i,j\}} [\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S) + \nu(S \cup \{i, j\}) - \nu(S \cup \{j\})] +$$

$$+ \sum_{S \subseteq N \setminus \{i,j\}} [\nu(S \cup \{j\}) - \nu(S) + \nu(S \cup \{i, j\}) - \nu(S \cup \{i\})]$$

$$= 2 \sum_{S \subseteq N \setminus \{i,j\}} [\nu(S \cup \{i, j\}) - \nu(S)] = 22^{n-2} \phi_{T'}(\nu_T)$$

TEOREMA 53. *(Lehrer). ϕ satisface los axiomas de nulidad, simetría, linealidad y reducción si y sólo si ϕ es el Valor de Banzhaf–Coleman en G.*

Demostración. La existencia nuevamente se demuestra exhibiendo que el Valor de Banzhaf–Coleman satisface los axiomas mencionados; en particular, el lema anterior demuestra que el axioma de reducción se satisface, los tres restantes se dejan como ejercicio al lector. La unicidad se demuestra primero para juegos de unanimidad, usando un proceso doble de inducción en forma simultánea: primero sobre el número de jugadores y en seguida sobre el número de jugadores no nulos en el juego de unanimidad.

Supóngase que ϕ a sido determinada para juegos simples con n jugadores y sobre juegos del tipo u_T^{n+1} donde $| T | \leq k$, es decir $\phi(u_T^{n+1}) = 1/2^{t-1}$, con $| T | = t$. Sea T arbitrario tal que $| T | = k + 1$, como:

a): $(t-1)u_T^{n+1} + w_T^{k,n+1} = \sum_{\{R | R \subseteq T, |R| = k\}} u_R^{n+1}$

b): por nulidad y simetría

$$\phi_i(u_T^{n+1}) = \begin{cases} a & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \notin T \end{cases}$$

c): por nulidad y simetría

$$\phi_i(w_T^{k,n+1}) = \begin{cases} b & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \notin T \end{cases}$$

entonces, utilizando linealidad en (a) e hipótesis de inducción en su lado derecho:

$$ka + b = k/2^{k-1} \tag{4}$$

Ahora, sea $S = \{i, j\}$ con $i, j \in T$, amalgamando i y j en u_T^{n+1} se obtiene por (a) y por aditividad que:

$$\phi_i(u_T^{n+1}) + \phi_j(u_T^{n+1}) = \phi_{S'}((u_T^{n+1})_S)$$

de donde, por el axioma de reducción se tiene:

$$2a \leq 1/2^{k-1} \tag{5}$$

mientras que si se amalgaman i y j en $w_T^{k,n+1}$, se obtiene el juego $\hat{\nu}$ dado por

$$\hat{\nu}(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } S' \in R \text{ y } k-2 \leq\mid (R\backslash\{S'\}) \cap T \mid \\ 0 & \text{si } i \notin T \end{cases}$$

con espacio de jugadores $N\backslash\{i, j\} \cup \{S'\}$.

Por hipótesis de inducción $\phi_{S'}(\nu) = k/2^{k-1}$ y nuevamente por el axioma de reducción:

$$2b \leq k/2^{k-1} \tag{6}$$

de (4.4), (4.5) y (4.6) se obtiene:

$$ka + b \leq k/2^k + k/2^k = k/2^{k-1} \tag{7}$$

comparando con (4.4) se obtiene que las desigualdades en (4.6) y (4.7) se deben satisfacer como igualdades. En particular

$$a = 1/2^k = \phi_i(u_T^{n+1}).$$

La extensión de la unicidad del valor a todo G se hace en la misma forma que como se hizo con el Valor de Shapley.

4. Valores y semivalores lineales

En esta sección se propone un enfoque común para axiomatizar valores lineales y se utiliza para generar los resultados de las secciones anteriores. Se considera un espacio vectorial de juegos, se utiliza un conjunto de axiomas para determinar el valor en una base del espacio vectorial y se aprovecha la linealidad para extender el valor a todo el espacio. La importancia de tener bases comunes radica en el poder comparar los supuestos que determinan los valores al elegir alguno de ellos en una aplicación particular.

Si $\{w_T \mid \emptyset \neq T \subseteq N\}$ es una base arbitraria para G entonces para cada ν existen reales δ_T^ν, $\emptyset \neq T \subseteq N$, tales que

$$\nu = \sum_T \delta_T^\nu w_T = A\delta^\nu$$

donde $a_{ST} = w_T(S)$ y por lo tanto:

$$\delta^\nu = A^{-1}\nu.$$

Como ψ es una solución lineal, se debe tener:

$$\psi(\nu) = \psi(\sum_T \delta_T^\nu w_T) = \delta_T^\nu \sum_T \psi(w_T) = B\delta^\nu = BA^{-1}\nu$$

donde $b_{iT} = \psi_i(w_T)$.

La base más comúnmente usada en teoría de juegos, y que se supondrá en lo sucesivo, es la formada por los juegos

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq S \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

para $\emptyset \neq T \subseteq N$.

Esto lleva a:

$$a_{ST} = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq S \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

$$b_{iT} = \psi_i(u_T).$$

Nótese que A^{-1} no depende del juego y que cada columna de B es el valor del juego base correspondiente. Así, si los valores en la base están determinados, la linealidad determina el valor en todo el espacio. Aprovechando esta propiedad, cuando se requieran otros axiomas, bastaría exigir que se satisfagan en juegos de la forma u_T. A continuación se encuentra la matriz A^{-1} y posteriormente se analiza la matriz B.

LEMA 54.

$$\sum_{\{R|T\subseteq R\subseteq S\}} (-1)^{r+t} = \begin{cases} 1 & si\ T = S \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

Demostración. La demostración es directa si T no está contenido en S o si $S = T$. Supóngase $T \subset S$, entonces

a): Si $T \cup \{i\} = S$, R toma los valores T y $T \cup \{i\}$ de donde

$$(-1)^{t+t} + (-1)^{t+t+1} = 0.$$

b): Supóngase que para cualesquiera S y T tales $T \cup \{i_1, \ldots, i_k\} = S$ se tiene que $\sum_{\{R|T\subseteq R\subseteq S\}} (-1)^{r+t} = 0$.

c): Sean S y T tales que $T \cup \{i_1, \ldots, i_{k+1}\} = S$, entonces

$$\sum_{\{R|T\subseteq R\subseteq S\}} (-1)^{r+t} = \sum_{\{R|T\subseteq R\subseteq S, i_{k+1}\in R\}} (-1)^{r+t} + \sum_{\{R|T\subseteq R\subseteq S, i_{k+1}\notin R\}} (-1)^{r+t} =$$

$$= \sum_{\{R|T\cup\{i_{k+1}\}\subseteq R\subseteq S\}} (-1)^{r+t} + \sum_{\{R|T\subseteq R\subseteq S\setminus\{i_{k+1}\}\}} (-1)^{r+t} = 0$$

PROPOSICIÓN 55. *Si a_{ST}^{-1} denota una entrada de la matriz A^{-1}, entonces $a_{ST}^{-1} = (-1)^{s+t} a_{ST}$.*

Demostración. Si $D = AA^{-1}$, entonces

$$d_{ST} = \sum_R a_{SR} a_{RT}^{-1} = \sum_R (-1)^{r+t} a_{SR} a_{RT} = \sum_{\{R|T\subseteq R\subseteq S\}} (-1)^{r+t}$$

y por el lema anterior $D = I$.

Hasta aquí, con solo pedir linealidad, se tiene que, $\psi(\nu) = BA^{-1}\nu$, donde ya se ha caracterizado completamente A^{-1}. En lo sucesivo, se van a trabajar diferentes conjuntos de axiomas para hacer lo propio con B.

El siguiente lema asegura que el pago al jugador $i \in R$, en u_R, con una solución que satisface los axiomas de simetría y nulidad, depende sólo de la cardinalidad de R.

Lema 56. *Si ψ es una solución simétrica que satisface el axioma de nulidad entonces*

a): $\psi_i(u_R) = \psi_j(u_T)$ *para todo* $i \in R$ *y* $j \in T$*, si* $\mid R \mid = \mid T \mid$
b): $\psi_i(u_R) = 0$*, si* $i \notin R$*.*

Demostración. Supóngase ψ una solución con las caracteristicas del lema. Para $i, j \in R$, y θ definida por: $\theta(i) = j, \theta(j) = i$ y $\theta(k) = k$ para $k \neq i, j$, se tiene que $\theta * u_R = u_R$ y por simetría

$$\psi(u_R) = \psi(\theta * u_R) = \theta * \psi(u_R)$$

es decir

$$\psi_i(u_R) = \psi_{\theta(i)}(u_R) = \psi_j(u_R)$$

Además, si $i \notin R$, i es un jugador nulo en u_R y por el axioma de nulidad $\psi_i(u_R) = 0$. Con esto, $\psi_i(u_R)$ debe ser de la forma:

$$\psi_i(u_R) = \begin{cases} q_R & \text{si } i \in R \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Ahora si S y T son tales que $s = t$ y θ es tal que $\theta(S) = T$ entonces $\theta * u_T = u_S$ y $\psi(u_S) = \psi(\theta * u_T) = \theta * \psi(u_T)$, esto es, si $i \in S$ y $\theta(i) = j$ entonces $j \in T$ y

$$q_S = \psi_j(u_S) = \psi_i(u_T) = q_T.$$

El pago común que recibe cada jugador de S, en u_S, cuando $\mid S \mid = r$ se denotará por q_r.

Teorema 57. *La solución ψ satisface los axiomas de linealidad, simetría y nulidad si y sólo si*

$$\psi_i(\nu) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_{s+1}(\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S))$$

donde:

$$p_s = \sum_{\{T \mid S \subseteq T\}} (-1)^{t+s} q_t = \sum_{t=s}^{n} (-1)^{t+s} \binom{n-s}{t-s} q_t$$

para $s = 1, \ldots, n$*.*

Antes de entrar en la demostración, nótese que la última ecuación puede escribirse matricialmente como: $p = Mq$ donde

$$m_{st} = \begin{cases} (-1)^{t+s}\binom{n-s}{t-s} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y además[1]

$$m_{st}^{-1} = \begin{cases} \binom{n-t}{r-t} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Así, al ser M no singular, dado q queda determinado p y viceversa.

Demostración. Supóngase ψ con las características del teorema, entonces por el lema anterior ψ determina q, la cual a su vez determina p. Ahora, sea $C = BA^{-1}$, entonces

$$c_{iS} = \sum_T b_{iT} a_{TS}^{-1} = \sum_{\{T|S\subseteq T\}} (-1)^{t+s} b_{iT} =$$

Ahora bien, si $i \in S$

$$c_{iS} = \sum_{\{T|S\subseteq T\}} (-1)^{t+s} q_t = p_s$$

y si $i \notin S$

$$c_{iS} = \sum_{\{T|(S\cup\{i\})\subseteq T\}} (-1)^{t+s} q_t$$

haciendo el cambio de variable $R = S \cup \{i\}$ se obtiene:

$$= - \sum_{\{T|R\subseteq T\}} (-1)^{t+r} q_t = -p_{s+1}$$

Como $\psi(\nu) = BA^{-1}\nu$ se tiene que:

$$\psi_i(\nu) = \sum_S c_{iS}\nu(S) = \sum_{T\ni i} c_{iT}\nu(T) + \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} c_{iS}\nu(S) =$$

$$= \sum_{T\ni i} p_t \nu(T) - \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} p_{s+1}\nu(S)$$

y haciendo $S = T\setminus\{i\}$ en el primer término:

$$= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} p_{s+1}\nu(S\cup\{i\}) - \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} p_{s+1}\nu(S) =$$

$$= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} p_{s+1}(\nu(S\cup\{i\}) - \nu(S))$$

Es fácil ver que la ψ dada en el teorema es lineal, simétrica y satisface el axioma de nulidad.

LEMA 58. *Si* $q_t = 1/t$ *entonces* $p_s = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$

Demostración. Por inducción matemática sobre la diferencia $n - s$. Para $s = n$, la demostración es directa. Supóngase que la aserción es válida para S con $s = k+1, \ldots, n$. Entonces si $\mid S \mid = k$ y $l \notin S$,

---

[1]Se desprende del hecho de que:

$$\sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-k}{m}\binom{n}{k} = 0$$

ver por ejemplo, Riordan (1978), p. 15.

$$\sum_{\{T|S\subseteq T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t} = \sum_{\{T|S\subseteq T, l\notin T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t} + \sum_{\{T|S\subseteq T, l\in T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t}$$
$$= \sum_{\{T|S\subseteq T\subseteq N\setminus\{l\}\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t} + \sum_{\{T|(S\cup\{l\})\subseteq T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t}$$
$$= \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)!} - \frac{s!(n-s-1)!}{n!} = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

Lema 59. *Si $q_t = 1/2^{t-1}$ entonces $p_s = \frac{1}{2^{n-1}}$*

Demostración. Nuevamente por inducción sobre $n-s$, si $s=n$, entonces independientemente del valor de n, el único término en la suma es con $T=N$ y la ecuación se satisface. Si S es tal que $s=n-k$ y $l\notin S$ entonces

$$\sum_{\{T|S\subseteq T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{2^{t-1}} = \sum_{\{T|S\subseteq T\subseteq N\setminus\{l\}\}} \frac{(-1)^{t+s}}{2^{t-1}} + \sum_{\{T|S\cup\{l\}\subseteq T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{2^{t-1}} =$$
$$= \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Proposición 60. *Si ψ es una solución lineal entonces con la sucesión $\{q_t\}$ dada en el lema 4.4, se tiene que:*

- **a):** *Si $q_t = 1/t$ entonces ψ es el Valor de Shapley.*
- **b):** *Si $q_t = 1/2^{t-1}$ entonces ψ es el Valor de Banzhaf–Coleman.*

Nótese que el axioma de eficiencia, el único de los axiomas que se utiliza en la demostración del Valor de Shapley y que no se menciona en la proposición anterior, determina $q_s = 1/s$.

Teorema 61. *Existe una única solución ψ que satisface los axiomas de nulidad, simetría, linealidad, reducción y $q_1 = 1$. Esta solución es el Valor de Banzhaf–Coleman.*

Demostración. La existencia nuevamente se demuestra exhibiendo que el Valor de Banzhaf–Coleman satisface los axiomas mencionados. Supóngase un operador ψ que satisface los cuatro axiomas mencionados en el teorema. Por el teorema 4.3 se tiene que:

$$\psi_i(\nu) = \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} p^n_{s+1}(\nu(S\cup\{i\}) - \nu(S)) =$$
$$= \sum_{S\ni i} p^n_s \nu(S) - \sum_{S\not\ni i} p^n_{s+1}\nu(S)$$
$$\psi_{T'}(\nu_T) = \sum_{\{S\subseteq N'|T'\in S\}} p^{n-1}_s \nu_T(S) - \sum_{\{S|T'\notin S\}} p^{n-1}_{s+1}\nu(S) =$$
$$= \sum_{\{S\subseteq N|\{i,j\}\subseteq S\}} p^{n-1}_{s-1}\nu(S) - \sum_{\{S|S\subseteq N\setminus\{i,j\}\}} p^{n-1}_{s+1}\nu(S)$$

así, $\psi_i(\nu) + \psi_j(\nu) \leq \psi_{T'}(\nu_T)$, si y sólo si,

$$\sum_{S\ni i} p_s^n \nu(S) - \sum_{S\not\ni i} p_{s+1}^n \nu(S) + \sum_{S\ni j} p_s^n \nu(S) - \sum_{S\not\ni j} p_{s+1}^n \nu(S) \leq$$

$$\sum_{\{S|\{i,j\}\subseteq S\}} p_{s-1}^{n-1}\nu(S) - \sum_{\{S|S\subseteq N\backslash\{i,j\}\}} p_{s+1}^{n-1}\nu(S)$$

si y sólo si

$$\sum_{\{S|\{i,j\}\subseteq S\}} (2p_s^n - p_{s-1}^{n-1})\nu(S) - \sum_{\{S|S\subseteq N\backslash\{i,j\}\}} (2p_{s+1}^n - p_{s+1}^{n-1})\nu(S) +$$

$$\sum_{\{S|i\in S, j\notin S\}} (p_s^n - p_{s+1}^n)\nu(S) + \sum_{\{S|i\notin S, j\in S\}} (p_s^n - p_{s+1}^n)\nu(S) \leq 0$$

Nótese que en esta desigualdad se tiene uno y sólo un término por cada coalición. Así, debe suceder que:

$$2p_s^n = p_{s-1}^{n-1} \;\; s = 2, .., n; \;\; n \geq 2$$

$$2p_{s+1}^n = p_{s+1}^{n-1} \;\; s = 0, ..n-2; \;\; n \geq 2.$$

$$p_s^n = p_{s+1}^n \;\; s = 1, .., n-1; \;\; n \geq 2$$

de donde se desprende fácilmente que

$$p_s^n = \frac{1}{2^{n-1}} q_1 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Otro concepto de solución que es lineal es el Valor de Shapley ponderado. El Valor de Shapley del juego $\nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = 0$ y $\nu(\{1,2\}) = 1$ es $\psi(\nu)' = (1/2, 1/2)$; sin embargo, posiblemente alguno de los jugadores necesite realizar un mayor esfuerzo en la coalición $\{1,2\}$. A partir de esta consideración se sugiere repartir de acuerdo a ponderaciones preestablecidas. Esta idea da lugar al Valor de Shapley ponderado, un valor que no necesariamente satisface el axioma de simetría.

Definición 62. *Se dirá que S es una coalición natural de socios en el juego ν, si para cada $T \subset S$ $(T \neq S)$ y $R \subseteq N\backslash S$, $\nu(R \cup T) = \nu(R)$.*

Una coalición natural de socios se comporta como un solo individuo, ya que ninguna subcoalición propia tiene poder.

Axioma de sociedad. Si S es una coalición natural de socios en ν entonces $\psi_i(\nu) = \psi_i(\psi\nu(S)u_S)$ para todo $i \in$S.

La interpretación de este axioma es la siguiente: se espera que cada coalición natural de socios juege como un solo individuo en ν y negocie lo obtenido entre sus elementos en forma independiente.

Definición 63. *El Valor de Shapley ponderado con un sistema de ponderación simple $w \in \mathbf{R}^n$, $w > 0$, es un mapeo lineal $\psi^w : G \to \mathbf{R}^n$ tal que:*

$$\psi_i^w(u_S) = \begin{cases} \frac{w_i}{w(S)} & si\ i \in S \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

LEMA 64. *Si S es una coalición natural de socios y $\delta = A^{-1}\nu$ entonces $\delta_T = 0$ si $S \nsubseteq T$ y $S \cap T \neq \emptyset$.*

Demostración. Supóngase que $S \nsubseteq T$ y $S \cap T \neq \emptyset$, entonces

$$\delta_T = \sum_{R \subseteq T} (-1)^{t+r} \nu(R)$$

ahora para $R \subseteq T$, sea $R_s = S \cap R$ y $R_t = R \cap (T \backslash S)$,

$$= \sum_{R_t \subseteq T \backslash S} \sum_{R_s \subseteq S \cap T} (-1)^{t+r_s+r_t} \nu(R_s \cup R_t)$$

$$= \sum_{R_t \subseteq T \backslash S} (-1)^{r_t} \nu(R_t) \sum_{R_s \subseteq S \cap T} (-1)^{t+r_s} = 0$$

por el lema 4.3.

TEOREMA 65. *ψ es una solución lineal que satisface los axiomas de sociedad, nulidad y $\psi(u_N) > 0$ si y sólo si existe w tal que ψ es el Valor de Shapley ponderado con sistema de ponderación simple w.*

Demostración. Sea ψ una solución que satisfaga los axiomas mencionados en el teorema. Como N es una coalición natural de socios en u_N:

$$\psi_i(u_N) = \psi u_N(S) \psi_i(u_S)$$

así, basta considerar $w_i = \psi_i(u_N)$ y sustituir en la ecuación anterior para obtener para $\psi_i(u_S) = w_i / w(S)$.

Para demostar el teorema en la otra dirección, primero supóngase que el jugador i es un jugador nulo en ν. Entonces

$$\varphi_i(\nu) = \sum_T \sum_S a_{ST}^{-1} \nu(T) = \sum_T \sum_{\{S | i \in S, S \subseteq T\}} \frac{w_i}{w(S)} (-1)^{s+t} \nu(T)$$

$$= \sum_{\{T | i \in T\}} \sum_{\{S | i \in S, S \subseteq T\}} \frac{w_i}{w(S)} (-1)^{s+t} \nu(T) +$$

$$\sum_{\{T | i \notin T\}} \sum_{\{S | i \in S, S \subseteq T\}} \frac{w_i}{w(S)} (-1)^{s+t} \nu(T)$$

$$= \sum_{\{T | i \notin T\}} \sum_{\{S | i \in S, S \subseteq T\}} \frac{w_i}{w(S)} (-1)^{s+t} [\nu(T \cup \{i\}) - \nu(T)] = 0.$$

Ahora, como el Valor de Shapley ponderado es lineal, el axioma de sociedad se puede expresar como:

$$\frac{w_i}{w(S)} \chi'_S B A^{-1} \nu = B^i A^{-1} \nu$$

donde S es una coalición natural de socios que contiene al jugador i, $b_{jT} = \frac{w_j}{w(T)}$ si $j \in T$ y cero de otra forma, B^i el i–ésimo renglon de la matriz B y $\chi_S \in \mathbf{R}^n$ con su j–ésima coordenada igual a 1 o 0 dependiendo de si $j \in S$ o no. Denotando por $\delta = A^{-1}\nu$, la igualdad es equivalente a:

$$\chi'_S B \delta = \frac{w(S)}{w_i} B^i \delta$$

Ahora bien,

$$\chi'_S B\delta = \sum_{j\in S}\sum_{T\ni j}\frac{w_j}{w(T)}\delta_T = \sum_T \frac{w(S\cap T)}{w(T)}\delta_T$$

y

$$\frac{w(S)}{w_i}B^i\delta = \frac{w(S)}{w_i}\sum_{T\ni i}\frac{w_i}{w(T)}\delta_T = \sum_{T\ni i}\frac{w(S)}{w(T)}\delta_T$$

y aplicando el lema anterior se tiene que las dos últimas expresiones son iguales.

5. Juegos y gráficas

En esta sección se analiza una generalización del Valor de Shapley donde no se supone *a priori* la formación de la gran coalición y cuya solución depende únicamente de ν y sus subjuegos.

Recuérdese que, intuitivamente, el juego se desarrolla en dos fases: en la primera de ellas se negocia la cooperación entre los jugadores y en la segunda se distribuye la ganancia de acuerdo a lo negociado. La idea básica que se desarrolla en esta sección consiste en suponer que en la primera fase del juego, los jugadores forman una serie de acuerdos bilaterales de cooperación; supóngase que como resultado de esta primera fase se obtiene para cada pareja de jugadores el si hubo o no acuerdo de cooperación entre ellos y llámase al conjunto de estos resultados una estructura de cooperación. Para un juego ν, el problema que se plantea es el asignar un pago a cada jugador en cada una de las estructuras de cooperación posibles. Para resolver este problema se hace una analogía entre gráficas y los subjuegos de ν. Por cada jugador se considera un nodo, los cuales al igual que el juego ν permanecen fijos a lo largo de la sección. Ahora, por cada estructura de cooperación se forma una gráfica teniendo como base los nodos anteriores y colocando una arista entre cada par de nodos que correspondan a jugadores que hayan decidido cooperar.

Aprovechando que en este caso las gráficas quedan determinadas por sus aristas, denótese por g^N a la gráfica completa:

$$g^N = \{\{i,j\} \mid i\in N, j\in N, i\neq j\}$$

y por GR a la familia de subgráficas de g^N, es decir :

$$GR = \{g \mid g\subseteq g^N\}$$

Así, una subgráfica g de GR, intuitivamente representa una estructura de cooperación y viceversa. El problema es asociar a cada estructura de cooperación un vector de pago.

Definición 66. *Para $S\subseteq N, g\in GR$ e $i,j\in S$, se dirá que i está conectado con j en S por g si y sólo si existe una sucesión de parejas de jugadores en S que hayan hecho acuerdo de cooperación, donde el jugador i pertenezca a la primera pareja y j a la última.*

Si se define por g/S a la gráfica g restringida a S, es decir, a la gráfica cuyo conjunto de vértices es S y cuya arista $\{i,j\}\in g/S$ con $i,j\in S$ si $\{i,j\}\in g$, entonces i esta conectado con j en S por g si y sólo si existe una trayectoria en g/S que conecta i con j.

Los nodos de cada una de las componentes de g/S forman una coalición, el conjunto de estas coaliciones se denota por S/g, esto es:

$S/g = \{\{i \mid i \text{ esta conectado con } j \text{ en } S \text{ por } g\} \mid j \in S\}$.

Así, lo que puede conseguir la coalición S dado que se dio la estructura de cooperación g, ya no es $\nu(S)$, sino: $\sum_{T \in S/g} \nu(T)$. Además se tiene la ventaja de que N/g es una partición de N.

Definición 67. *A la función $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:*

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

Lo que logra la gran coalición dado que se ha dado la estructura de cooperación g, es $\sum_{T \in N/g} \nu(T)$, lo cual proviene de lo que consiguen las coaliciones que están en N/g, cada una de ellas por separado. ψ es una regla de asignación si el monto total que obtienen los jugadores que forman $T \in N/g$ es exactamente $\nu(T)$.

Definición 68. *La regla de asignación ψ es estable si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:*

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \backslash \{i, j\})$$
$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \backslash \{i, j\}).$$

Bajo una regla de asignación estable, en cualquier acuerdo de cooperación bilateral ambos jugadores se benefician.

Definición 69. *La regla de asignación ψ es justa si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:*

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \backslash \{i, j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \backslash \{i, j\}).$$

Con una regla de asignación justa, al romperse el acuerdo de cooperación entre dos jugadores, ambos salen igualmente perjudicados o beneficiados.

Definición 70. *Para cada pareja $(\nu, g) \in G \times GR$ sea $\nu/g \in G$ definido por:*

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$

Se supone que aun cuando dos jugadores en S no tengan un acuerdo directo de cooperación, se considera que quedan en la misma subcoalición si existe una cadena en S, de parejas de jugadores que acordaron cooperar. Es decir, los jugadores pueden comunicarse a través de aristas en g, pero sólo a través de ellas. Así, $(\nu/g)(S)$ es lo que la coalición S puede conseguir dada la estructura de cooperación g.

Por ejemplo, para el juego con 4 jugadores y $g = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ se tiene que $\nu/g(\{1, 3\}) = \nu(\{1\}) + \nu(\{3\})$,$\nu/g(\{1, 2, 4\}) = \nu(\{1, 2\}) + \nu(\{4\})$, $\nu/g(\{1, 2, 3\}) = \nu(\{1, 2, 3\})$.

Teorema 71. *(Myerson). Dado un juego ν existe una única regla de asignación justa $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ la cual esta dada por:*

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

donde Sh es el Valor de Shapley. Además si ν es superaditivo la regla de asignación es estable.

Demostración. Supóngase que existen dos reglas de asignación justas ψ^1, ψ^2 distintas y sea g una gráfica tal que:

i): $\psi^1(g) \neq \psi^2(g)$.
ii): $\psi^1(g\backslash\{i,j\}) = \psi^2(g\backslash\{i,j\})$ para toda $\{i,j\} \in g$.

Esta gráfica existe, ya que ambas reglas de asignación deben coincidir en la gráfica que no tiene aristas. Entonces:

$$\psi_i^1(g) - \psi_j^1(g) = \psi_i^1(g\backslash\{i,j\}) - \psi_j^1(g\backslash\{i,j\})$$

$$= \psi_i^2(g\backslash\{i,j\}) - \psi_j^2(g\backslash\{i,j\}) = \psi_i^2(g) - \psi_j^2(g)$$

para i y j arbitrarios, pero conectados en la misma componete S de g. Así,

$$\sum_{i \in S}[\psi_i^1(g) - \psi_i^2(g)] =\mid S \mid (\psi_j^1(g) - \psi_j^2(g))$$

y como cada una de ellas es regla de asignación:

$$\sum_{i \in S}[\psi_i^1(g) - \psi_i^2(g)] = \nu(S) - \nu(S) = 0$$

de donde $\mid S \mid (\psi_j^1(g) - \psi_j^2(g)) = 0$ y por lo tanto $\psi^1 = \psi^2$.

Sólo resta demostrar que $\psi(g) = \varphi(\nu/g)$ es una regla de asignación justa y que para juegos superaditivos es estable.
a) Para demostrar que $\psi = Sh(\cdot/g)$ es una regla de asignación, sea $g \in GR$ arbitraria y para cada $S \in N/g$ sea u^S definida por

$$u^S(T) = \sum_{R \in (T \cap S)/g} \nu(R).$$

Ahora, como cada componente de T/g está contenida en alguna componente de N/g, se puede expresar a T/g como:

$$T/g = \cup_{S \in N/g}(T \cap S)/g$$

de donde

$$\nu/g = \sum_{T \in N/g} u^T$$

Nótese además que los jugadores que no están en S son jugadores nulos en u^S. Así, para $S, T \in N/g$:

$$\sum_{i \in S} Sh_i(u^T) = \begin{cases} u^T(N) & \text{si } S = T \\ 0 & \text{si } S \cap T = \emptyset \end{cases}$$

y como Sh es lineal,

$$\sum_{i\in S} Sh_i(\nu/g) = \sum_{T\in N/g}\sum_{i\in S} Sh_i(u^T) = u^S(N) = \sum_{R\in S/g}\nu(R) = \nu(S).$$

b) Para demostrar que ψ es justa, selecciónese $g \in GR$ arbitraria, $\{i,j\}\in g$ y sea $w = \nu/g - \nu/(g\backslash\{i,j\})$. Obsérvese que $S/g = S/(g\backslash\{i,j\})$ si $\{i,j\}\not\subseteq S$, esto es, $w(S) = 0$ si $\{i,j\}\not\subseteq S$. Como φ es simétrica, $\varphi_i(w) = \varphi_j(w)$, pero por la linealidad de Sh esto significa que

$$Sh_i(\nu/g) - Sh_i(\nu/(g\backslash\{i,j\})) = Sh_j(\nu/g) - Sh_j(\nu/(g\backslash\{i,j\})).$$

c) Para demostrar que ψ es estable para juegos superaditivos, nótese que si $\{i,j\}\subseteq S, S/(g\backslash\{i,j\})$ es un refinamiento de S/g y $S/g = S/(g/\{i,j\})$ en caso contrario. Así,

$$\nu/g(S) = \sum_{T\in S/g}\nu(T) \geq \sum_{T\in S/(g\backslash\{i,j\})}\nu(T) = \nu/(g\backslash\{i,j\})(S) \text{ si } i\in S$$

$$\nu/g(S) = \nu/(g\backslash\{i,j\})(S) \text{ si } i\notin S.$$

Así, para toda $S\subseteq N$,

$$\nu/g(S\cup\{i\}) - \nu/g(S) \geq \nu/(g\backslash\{i,j\})(S\cup\{i\}) - \nu/(g\backslash\{i,j\})(S)$$

de donde,

$$Sh_i(\nu/g) \geq Sh_i(\nu/(g\backslash\{i,j\})).$$

Por ejemplo, para el juego tripersonal

$$\nu(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mid S\mid = 0 \\ 100 & \text{si } \mid S\mid = 2 \\ 110 & \text{si } \mid S\mid = 3 \end{cases}$$

la regla de asignación justa es la siguiente:

g	$\psi(g)$
$\{\emptyset\}$	$(0,0,0)$
$\{\{1,2\}\}$	$(50,50,0)$
$\{\{1,3\}\}$	$(50,0,50)$
$\{\{2,3\}\}$	$(0,50,50)$
$\{\{1,2\},\{1,3\}\}$	$(70,20,20)$
$\{\{1,2\},\{2,3\}\}$	$(20,70,20)$
$\{\{1,3\},\{2,3\}\}$	$(20,20,70)$
$\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$	$(36\frac{2}{3},36\frac{2}{3},36\frac{2}{3})$

Así por ejemplo, si se forma la coalición $\{1,2\}$ dejando al jugador 3 "fuera", cada uno de ellos obtiene 50, y difícilmente alguno de ellos va cooperar con el jugador 3 con el fin de obtener 70, ya que si lo hace, inmediatamente el otro jugador también lo hará para llegar al vector de pago $(36\frac{2}{3},36\frac{2}{3},36\frac{2}{3})$.

Dado que $\nu/g^N = \nu$, se tiene que $\psi(g^N) = Sh(\nu)$, esto es, la regla de asignación justa coincide con el Valor de Shapley cuando todos cooperan entre sí.

6. Soluciones axiomáticas

Cuando una persona se enfrenta sistemáticamente a resolver un mismo tipo de situaciones de conflicto, usualmente va formando criterios o principios para su resolución. La idea que se maneja en esta sección es el encontrar una colección de estos principios que determine lógicamente la solución o el veredicto para cualquiera de estas situaciones, con la condición adicional de que nunca se llegue a una situación contradictoria.

En lugar de considerar un problema aislado, se forma un conjunto X de problemas "similares"; posteriormente se define un conjunto S de soluciones, incorporando en él todas las soluciones concebibles para cada uno de los problemas en X, (al especificar X y S se intenta que tengan alguna estructura matemática adecuada). Ya con ésto, un operador

$$\varphi : X \to S$$

está dando una solución $\varphi(x) \in S$ a cada problema $x \in X$.

El siguiente paso es incorporar criterios generales (axiomas) que se crea deban de satisfacer cualquier operador φ "admisible", hasta que exista un solo operador que satisfaga todos los criterios. Se tienen dos ventajas al seguir este procedimiento: en primer lugar se obtienen o se eliminan soluciones para toda una clase de problemas con sólo aceptar o no "simples" supuestos generales y, en segundo, se evita la discusión sobre características que deba tener la solución de un problema particular.

Dada una clase fija de problemas, las soluciones que se obtienen son "buenas" o "justas" en el sentido de que no hay otro conjunto de soluciones asociadas a los problemas, de tal forma que se satisfagan simultáneamente todos los axiomas o criterios preestablecidos. Samet y Tauman (1982) utilizando esta idea, determinan, entre otros resultados, la asignación de costos de producción. Considérese la siguiente situación: supóngase lo necesario para que al producir un número finito de bienes de consumo, la función de costos de producción quede determinada unívocamente para cada vector de bienes (precios de insumos fijos, tecnología dada, minimización del costo de producción dado el vector de bienes de consumo, etc.). El problema es encontrar costos de producción "adecuados" para cada uno de los bienes. Nótese que la función de costos de producción no necesariamente es de rendimientos constantes a escala, y de hecho es éste el caso de interés. Supóngase que $F(\alpha)$ es el costo de producir α, y denótese por $\mathcal{F}^m$ al conjunto:

$$\mathcal{F}^m = \{F : \mathbf{R}^m_+ \to \mathbf{R} \mid F(0) = 0, F \text{ continuamente diferenciable en } \mathbf{R}^m_+\}$$

Definición 72. *Un mecanismo de precios es una función P, la cual asocia con cada m, cada $F \in \mathcal{F}^m$ y cada $\alpha \in \mathbf{R}^m_+$ un vector de precios $P(F, \alpha)$ en $\mathbf{R}^m_+$, donde $P_i(F, \alpha)$ se interpreta como el costo de producción del i-ésimo bien.*

A continuación, Samet y Tauman demuestran que existe un único mecanismo de precios que satisface cinco axiomas en forma simultánea, para los cuales solo incluimos su interpretación:

Axioma 1. Los precios son independientes de las unidades en que se midan.

Axioma 2. Dos bienes que tienen el mismo efecto en el costo deben tener el mismo precio.

Axioma 3. Si el costo de un bien se puede descomponer en factores, entonces el costo del bien es la suma de los costos de los factores.

Axioma 4. El precio de un vector de bienes α para el cual la función de costo es no decreciente en una vecindad de α, es no negativo.
Axioma 5. Al evaluar con el mecanismo de precios un vector de bienes se obtiene su costo de producción, es decir, el costo de producción se divide entre los bienes a través del mecanismo de precios.

Dubey (1982) también sigue este procedimiento, analizando el siguiente problema: se tienen aviones de diferentes tipos (ordenados) que utilizan un número finito de aeropuertos. El problema es asignar el costo de mantenimiento (o de construcción) de los aeropuertos entre los usuarios.

Si se entiende por un movimiento el aterrizaje y despege de uno de los aviones, una forma de abordar el problema es la siguiente: para cada uno de los aeropuertos defínase a N_i como el conjunto de movimientos que se realizan por aviones del tipo i en un periodo de tiempo fijo; a c_i como el costo de dar mantenimiento al aeropuerto si sólo se permite su uso a aviones de tipo no mayor (no posterior) al tipo i. Con esto se puede definir el juego

$$\nu(S) = -\max\{c_i \mid S \cap N_i \neq \phi, i = 1, \ldots, m\}$$

el cual asigna a un subconjunto de aviones el costo de mantenimiento del aeropuerto en el que se incurriría si sólo lo usaran los aviones en S.

Si se construyen los conjuntos de tal manera que $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ donde c_1 sea el costo de mantenimiento de los aviones más pequeños, c_2 para los que le siguen en tamaño, y así sucesivamente hasta llegar a los más grandes con c_m y se calcula el Valor de Shapley, se obtiene la siguiente solución: se divide c_1 en partes iguales entre $\cup_{i=1}^{m} N_i$, se divide a $c_2 - c_1$ en partes iguales sólo entre $\cup_{i=2}^{m} N_i$, y así hasta que $c_m - c_{m-1}$ sólo es dividido en partes iguales entre los movimientos en N_m.

Sin embargo, a pesar de que la solución parece razonable, hay dos razones que motivan a Dubey a hacer el trabajo antes mencionado: primero, el espacio de juegos que se genera al variar los datos del problema es un subconjunto propio de G y por lo tanto pierde sentido en esta aplicación el Valor de Shapley como solución axiomática y segundo, los axiomas están en el lenguaje de Teoría de Juegos lo que genera la necesidad de refrasearlos en términos del problema que nos ocupa.

Después de estas observaciones, Dubey aborda el problema de la siguiente manera, define los siguientes conceptos:

- **:** N_i conjunto de aviones del tipo i.
- **:** $N = \cup_{i=1}^{m} N_i$
- **:** A conjunto de aeropuertos.
- **:** c_i^{ν} costo de mantenimiento del aeropuerto $\nu \in A$, bajo el supuesto de que sólo se le da cabida a aviones del tipo i o a más pequeños.
- **:** L conjunto de sucesiones finitas de elementos de A.
- **:** $\alpha : N \to L$, $\alpha(i)$ se interpreta como el recorrido del avión i.

a partir de lo cual define una estructura relevante del problema como:

$$\Gamma = [N; N_1, \ldots, N_m; A; c = \{c_i^{\nu} \mid \nu \in A, i = 1, \ldots, m\}; \alpha]$$

posteriormente, a cada una de ellas le asocia una función de costos

$$\nu_\Gamma(S) = \sum_{\nu \in A} \max \{c_i^{\nu} \mid \nu \in \alpha(j) \text{ para algún } j \in S \cap N_i, i = 1, \ldots, m\}$$

la cual asigna a cada subconjunto de aviones un costo de mantenimiento bajo la hipótesis de que sólo esos aviones hacen uso de los aeropuertos.

Ya con esto, define el operador

$$\varphi : \Delta \rightarrow \mathbf{R}^n$$

donde Δ es el conjunto de todas las estructuras relevantes y demuestra la existencia y unicidad del operador, obteniendo la misma solución que se obtuvo anteriormente con el Valor de Shapley, a partir de los siguientes axiomas:
Axioma 1. Si dos estructuras inducen la misma función de costo, entonces tienen la misma asignación de costos.
Axioma 2. El monto que se recorre en cualquier estructura relevante es igual al costo de su mantenimiento.
Axioma 3. A los aviones que no realizan recorrido se les asigna costo cero.
Axioma 4. Si en una estructura dos aviones coinciden tanto en cada uno de los costos de mantenimiento de los aeropuertos como en su recorrido entonces se les debe asignar el mismo costo.
Axioma 5. La asignación de costos por concepto de un aeropuerto es independiente de los movimientos en otros aeropuertos.

7. Ejercicios

1. Demuestre que el Valor de Banzhaf–Coleman satisface los axiomas de nulidad, simetría y aditividad.

2. Demuestre que si el axioma de reducción se cambia a:

$$\sum_{i \in T} \phi_i(\nu) = \phi_{T'}(\nu_T) \text{ para toda } T \text{ tal que } \mid T \mid = \mid N \mid$$

entonces el valor que queda determinado con los cuatro axiomas del teorema 4.4. es el Valor de Shapley.

3. Demuestre que $\varphi\nu(i) = \nu(N)/n$ es una solución que satisface los axiomas de linealidad, simetría y eficiencia, pero no el de nulidad.

4. Demuestre que si G es cualquier conjunto de juegos aditivos y φ es una solución sobre G tal que:

a): φ es eficiente
b): φ es racional individual

entonces, φ existe y es única.

5. Demuestre que el Valor de Shapley ponderado con sistema de ponderación simple w es el Valor de Shapley si y sólo si existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda w = \iota$.