1. Preservación de diferencias

Dado (N,v), sea $G=\{(S,v)\mid S\subseteq N\}$. Por $x(S)\in R^S$, denotamos la solución de (S,v).

Definition 1. *Diremos que $x(\cdot)$, es eficiente si y sólo si $\sum_{i\in S} x_i(S)=v(S)$ para toda $S\subseteq N$.*

Definition 2. *Diremos que $x(\cdot)$ satisface contribuciones balanceadas si y sólo si*

$$x_i(S)-x_i(S\backslash\{j\})=x_j(S)-x_j(S\backslash\{i\})$$

para todo $S\subseteq N$ y $i,j\in S$.

Definition 3. *Se dice que $\{d_{ij}\}_{ij\in N}$ son compatibles si y sólo si*

$$d_{ii}=0,\quad d_{ij}=-d_{ji},\quad d_{ik}=d_{ij}+d_{jk}.$$

Definition 4. *Dadas $\{d_{ij}\}_{ij\in N}$ compatibles en (S,v), se dice que x preserva dif si y sólo si $d_{ij}=x_i-x_j$ para todo $i,j\in N$.*

Lemma 1. *Dadas $\{d_{ij}\}_{ij\in N}$ compatibles en (S,v), existe un único x eficiente que preserva dif.:*

$$x_i=\tfrac{1}{n}\left[v(N)+\textstyle\sum_j d_{ij}\right],\qquad x_j=x_i-d_{ij}$$

Theorem 1. *Si $x(T)=Sh(T,v)$ para coaliciones de cardinalidad $s-1$, entonces las constantes $d_{ij}=x_i(S\backslash\{j\})-x_j(S\backslash\{i\})$, son compatibles en (S,v). Es decir*

$$d_{ij}=x_i(S)-x_j(S)=x_i(S\backslash\{j\})-x_j(S\backslash\{i\}).$$

Además,

$$x_i(S)=Sh_i(S,v).$$

Demostración

$$\begin{aligned}d_{ij}&=x_i(S\backslash\{j\})-x_j(S\backslash\{i\})=P(S\backslash\{j\},v)-P(S\backslash\{i,j\},v)-P(S\backslash\{i\},v)+P(S\backslash\{i,j\},v)\\&=P(S\backslash\{j\},v)-P(S\backslash\{i\},v)=P(S\backslash\{j\},v)-P(S,v)-P(S\backslash\{i\},v)+P(S,v)\\&=x_i(S)-x_j(S).\end{aligned}$$

Ahora, como

$$x_i(S)-x_j(S)=P(S\backslash\{j\},v)-P(S\backslash\{i\},v)$$

dejando fijo i y promediando sobre j :

$$x_i(S)-\frac{v(S)}{s}=\frac{1}{s}\sum_{j\in S}P(S\backslash\{j\},v)-P(S\backslash\{i\},v)$$

$$x_i(S)+P(S\backslash\{i\},v)=\frac{1}{s}\left[v(S)+\sum_{j\in S}P(S\backslash\{j\},v)\right]=P(S)$$

Así,

$$x_i(S)=P(S)-P(S\backslash\{i\},v)=Sh_i(S,v).$$

Corollary 1. *$x(\cdot)$ es eficiente y satisface contribuciones balanceadas si y sólo si $x(S)=Sh_i(S,v)$ para toda $S\subseteq N$.*