Variable Compleja I

Maite Fernández Unzieta
Universidad de Guanajuato
Enero – Junio 2012

Eugenio Daniel Flores Alatorre

Bibliografía

Complex Analysis	3rd ed.	Ahlfors
Basic Complex Analysis		Marsden
Functions of one complex variable		Conray
Complex analysis		Lang

Temario

- Plano Complejo
- Espacios vectoriales complejos
- Funciones holomorfas y analíticas
- Integral de Cauchy y sus aplicaciones
- Funciones especiales
- Teorema de Riemann

Forma de evaluar

3 exámenes parciales

Examen final

Tareas

$$C = \frac{Parcial_1 + Parcial_2 + Parcial_3}{3} + \varepsilon(Tareas)$$

Si $C \geq 8.5$, entonces no es necesario presentar examen final.

Si $C < 8.5$, es necesario presentar examen final.

Si no se presenta examen final, *C* es la calificación final. En caso contrario, la calificación final se calcula como sigue:

$$C_{final} = \frac{C + Examen\ final}{2}$$

Los números complejos

$$\mathbb{C} \coloneqq \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Si $z = x + iy$, entonces $x \coloneqq Re(z), y \coloneqq Im(z)$.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un campo conmutativo:

- $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo abeliano
  - El neutro es $0 + i0$
- $(\mathbb{C}, \cdot)$ es un grupo abeliano
  - El neutro es $1 + i0$
- Las operaciones $+, \cdot$ son distributivas y las definimos como sigue:
  - $(a + ib) + (x + iy) \coloneqq (a + x) + i(b + y)$
  - $(a + ib) \cdot (x + iy) \coloneqq ax + iay + ibx + i^2by = (ax - by) + i(ay + bx)$

Observación:

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$
$$(x + iy) \longmapsto (x, y)$$

La suma en $\mathbb{C}$ es la misma que en $\mathbb{R}^2$, pero el producto no está definido en el segundo.

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longmapsto x + i0$$

$\mathcal{J}$ es un encaje, función $\mathbb{R}$-lineal, inyectiva. Im$(\mathcal{J})$ es el eje horizontal. Se puede definir un encaje como cualquier recta que pasa por el origen.

Dado $z \neq 0$, calculamos z^{-1}:

$$0 \neq z = a + ib$$
$$z^{-1} = x + iy \text{ tal que } (a + ib)(x + iy) = 1$$
$$\Leftrightarrow (ax - by) + i(ay + bx)1$$
$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{Bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ que tiene solución única:}$$
$$z^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - ib)$$

Si $a^2 + b^2 = 1$, la multiplicación es una rotación.

En coordenadas polares:

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

El producto se ve así:

$$z = (a + ib)$$
$$w = (x + iy)$$

$$z \cdot w = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y no:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\frac{z}{w} \coloneqq z \cdot w^{-1} = (a + ib)\frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{(ax - by) + i(ay + bx)}{x^2 + y^2}$$

Finalmente, hay que observar que

$$i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$$

y, en general, para toda *n* según su residuo módulo 4.

Teorema: Supongamos que $\mathbb{F}$ es un campo tal que:

- $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{F}$ es un subcampo.
- La ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución.

entonces existe un subcampo de $\mathbb{F}$ (llamémoslo *F*) cumpliendo lo mismo

$$\mathbb{R} \hookrightarrow F \hookrightarrow \mathbb{F}$$

con $\varphi\colon \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{F}$ inyectiva, que cumple que:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$
$$\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$
$$\varphi(0) = 0$$
$$\varphi(1) = 1$$

Demostración: Llamemos i a una solución de $x^2 + 1 = 0, i \cdot i = -1$. Sea F un subcampo con $x + iy, x \in \varphi(\mathbb{R}), y \in \varphi(\mathbb{R})$. Se verifican las condiciones.

Otra definición de $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

donde

$$a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

es una función biyectiva.

Vamos a verifica que se trata de un isomorfismo de campo. Consideramos $c = a + ib, z = x + iy$, con $c, z \in \mathbb{C}$.

1) Manda la suma en la suma:

$$\varphi(c) + \varphi(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + x & b + y \\ -(b + y) & a + x \end{pmatrix} = \varphi(c + z)$$

2) Manda el producto en el producto:

$$\varphi(c)\varphi(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & bx + ay \\ -(bx + ay) & ax - by \end{pmatrix} = \varphi(cz)$$

3) Manda los neutros en los neutros:

$$\varphi(0) = \varphi(0 + i0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\varphi(1) = \varphi(1 + i0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) De las tres anteriores, puede deducirse que manda inversos en inversos:

$$\varphi(c^{-1}) = \varphi((a + ib)^{-1}) = \varphi\left(\frac{a - ib}{a^2 + b^2}\right) = \frac{1}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$$

Observación: Todo esto se conserva si vemos las matrices como rotaciones en coordenadas polares, algo que haremos más adelante, recordando las siguientes fórmulas:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2$$
$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2$$

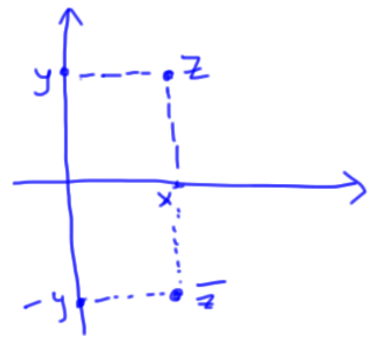
Conjugación

Definimos la función $*$ como sigue:

$$\mathbb{C} \xrightarrow{*} \mathbb{C}$$
$$x + iy \mapsto x - iy$$

Observaciones:

1) Conjugar es reflejar sobre el eje real



2) Componer la función consigo misma es la función identidad

$$**= id$$

Entonces, si $z = a + ib$, $\bar{z} \coloneqq a - ib$, el conjugado de z.

Podemos definir la parte real y la parte imaginaria en función del conjugado:

$$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{a+ib+a-ib}{2} = a$$
$$Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2} = \frac{a+ib-a+ib}{2} = b$$

Observación: Trabajando en los complejos como las matrices definidas antes, tenemos:

$$\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}} = \bar{z} = z^t = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Propiedades:

1) $\overline{c+z} = \bar{c} + \bar{z}$

$$\overline{c+z} = \overline{a+\imath b+x+\imath y} = \overline{(a+x)+\imath(b+y)} = (a+x)-i(b+y) = a-ib+x-iy = \bar{c}+\bar{z}$$

2) $\overline{cz} = \bar{c} \cdot \bar{z}$

$$\overline{cz} = \overline{(a+\imath b)(x+\imath y)} = \overline{(ax-by)+\imath(ay+bx)} = (ax-by)-i(ay+bx) = (a-ib)(x-iy)$$
$$= \bar{c}\bar{z}$$

3) Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow a+ib = a-ib \Leftrightarrow ib = -ib \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

La recta real es el conjunto de puntos fijos de la conjugación.

4) Decimos que z es imaginario $\Leftrightarrow z = \overline{-z}$

$$a+ib = z = \overline{-z} = \overline{-a-\imath b} = -a+ib \Leftrightarrow a = -a \Leftrightarrow a = 0$$

5) $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$

Empezamos a trabajar con el módulo o norma que corresponde según el isomorfismo de $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$.

$$z \cdot \bar{z} \geq 0 \in \mathbb{R}$$

pues

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

Definimos

$$|\cdot|: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$|z| \longmapsto \sqrt{z\bar{z}}$$

Propiedades:

1) $|z| = |\bar{z}|$
2) |cz|=|c||z|
3) $\left|\frac{z}{c}\right| = \frac{|z|}{|c|}, c \neq 0$
4) $|Re(z)| \leq |z|, |Im(z)| \leq |z|$
5) Desigualdad del triángulo

$$|c + z| \leq |c| + |z|$$

6) Desigualdad del triángulo generalizada

$$\left|\sum_{i}^{k} z_i\right| \leq \sum_{i}^{k} |z_i|$$

7) Desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\left|\sum_{i}^{k} z_i w_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i}^{k} |z_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i}^{k} |w_i|^2}$$

Demostración:

Consideramos el polinomio en t

$$\sum |x_i - t\overline{y_i}|^2 \geq 0$$

por ser la norma no-negativa. Como el caso en que es igual a cero es trivial, podemos descartarlo. Dado que tenemos un polinomio positivo, grado dos, no es posible que tenga raíces en los reales.

Recordando que

$$|a-b|^2 = (a-b)\overline{(a-b)} = |x|^2 + |y|^2 - 2Re\left(a\bar{b}\right)$$

y si expandimos el polinomio, obtenemos

$$\sum(|x_i|^2 + |ty_i|^2) - 2Re\sum(\bar{t}x_iy_i)$$

que implica

$$t = \left(\sum x_iy_i\right)\left(\sum|y_i|^2\right)^{-1}$$

Sustituyendo,

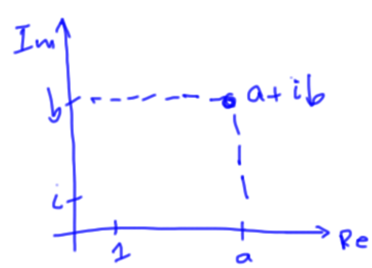
$$\sum|x_i - t\overline{y_i}|^2 = \sum|x_i|^2 + \left|\sum x_iy_i\right|^2\left(\sum|y_i|^2\right)^{-1} - 2Re\left(\left|\sum x_iy_i\right|^2\left(\sum|y_i|^2\right)^{-1}\right)$$

$$= \sum|x_i|^2 - \frac{|\sum x_iy_i|^2}{\sum|y_i|^2} \geq 0$$

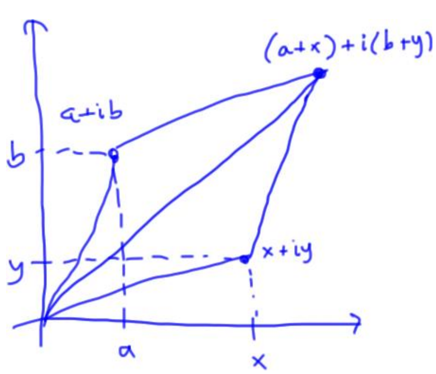
$$\Rightarrow \left|\sum x_iy_i\right|^2 \leq \sum|x_i|^2 \cdot \sum|y_i|^2$$

Representación geométrica de $\mathbb{C}$

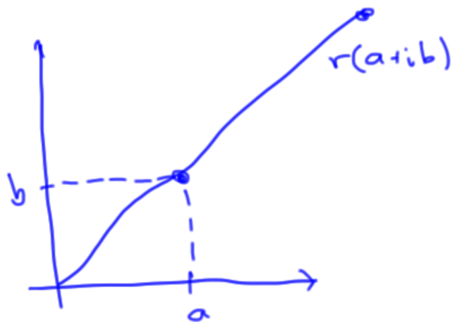
Vectores



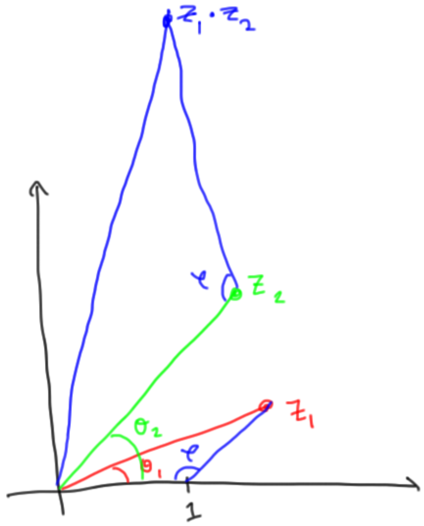
La suma se representa con la ley del paralelogramo



Producto escalar



Producto



El producto se entiende gráficamente por la semejanza de los triángulos $\Delta O1z_1$ y $\Delta Oz_2(z_1z_2)$. La semejanza se encuentra por la construcción –pues los ángulos se eligen iguales. Encontramos que la razón de semejanza es z_2 que implica que el punto marcado con z_1z_2 es en realidad el valor del producto.

Coordenadas Polares

Otra representación sumamente importante para los complejos es en coordenadas polares. Recordando:

Si $z = x + iy$ en coordenadas rectangulares o cartesianas, entonces

$$z = re^{i\theta}$$

donde $z \neq 0, r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

O bien,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

de acuerdo a la fórmula de Euler. No está de más recordar que $|e^{i\theta}| = 1$.

Denotamos por r la longitud o módulo de z, y por θel ángulo o argumento, entendiendo por ángulo el comprendido entre el eje real y el vector z. Es decir:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ ó } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ si } x = 0$$

Podemos definir la función argumento como sigue:

$$arg: \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

pero no estaría bien definida pues sería multivaluada. Por ello, acordamos definirla como sigue:

$$arg: \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow [0, 2\pi)$$

Aunque podemos expresar la suma de manera mucho más sencilla con coordenadas rectangulares, el producto es más sencillo en polares:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

si recordamos que

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$$

Es decir, el producto de dos números complejos en coordenadas polares es el producto de los módulos y la suma de los argumentos.

Esta operación coincide con la definición siguiendo la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Siguiendo la fórmula de de Moivre,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Entonces es posible calcular las raíces n-ésimas de cualquier número complejo de manera muy sencilla. Buscamos

$$z^n = a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

entonces

$$z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

es una raíz n-ésima de a. Por la definición de la función argumento, tenemos

$$\theta_k = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$$

para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, tenemos k valores distintos para el argumento. Es decir, todo número complejo tiene n raíces n-ésimas.

Resulta muy útil tener en mente las raíces n-ésimas de la unidad:

$$\omega_k = k\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right), k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

pues dado $z \in \mathbb{C}$, si v es una de sus raíces n-ésimas cualquiera ($v^n = z$), entonces $\sqrt[n]{z} = \{v, v\omega, v\omega^2, \dots, v\omega^{n-1}\}$ donde $\{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$ son las raíces n-ésimas de la unidad.

Demostración:

Supongamos que $v\omega^j = v\omega^k$. Puesto que todo número distinto de cero en los complejos tiene inverso, multiplicamos por v^{-1} y obtenemos $\omega^j = \omega^k$ lo cual es imposible si $j, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Por lo tanto, todas las raíces propuestas son distintas.

Veamos ahora que son raíces. Observemos que $(v\omega^j)^n = v^n\omega^{jn} = z \cdot 1$. ∴ todas son raíces.

Representación a partir de la esfera de Riemann

Es necesario ver a los complejos como un conjunto de $\mathbb{R}^3$, y después hacer una función que los identifique con la esfera S^3. Dicha función será la proyección estereográfica. Para ello, debemos agregar un punto: ∞.

$$\mathbb{C} = \{(x_1 + ix_2)\} = \{(x_1, x_2, 0)\} \in \mathbb{R}^3$$

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Consideramos para todos los casos $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, y también $\infty = (0,0,1)$ de modo que la aritmética se sostenga:

$$\begin{aligned} z + \infty = \infty + z = \infty, &\qquad z \neq \infty \\ z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, &\qquad z \neq 0 \end{aligned}$$

y en los casos no considerados, las operaciones no están definidas.

Definimos la proyección estereográfica como sigue:

$$\begin{gathered} S^2 \backslash N \to \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \end{gathered}$$

y nuestro interés está en demostrar que es biyectiva.

Consideramos la ecuación de la recta que pasa por N y por w:

$$\begin{gathered} N + \lambda\left(\overrightarrow{w - N}\right) \\ = (0,0,1) + \lambda(x_1, x_2, x_3 - 1) \\ = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda(x_3 - 1) + 1) \end{gathered}$$

de donde

$$\lambda = \frac{1}{1 - x_3}$$

y

$$z = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0\right) \in \mathbb{R}^3$$

Definimos la inversa como sigue:

$$\begin{gathered} \mathbb{C} \longrightarrow S^2 \backslash N \\ z \longmapsto \left(\frac{z + \bar{z}}{1 - |z|^2}, \frac{z + \bar{z}}{1 - |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 - |z|^2}\right) \end{gathered}$$

Es necesario verificar que la imagen tiene módulo 1 (para que caiga en la esfera). Vamos a hacer el trabajo inverso, definiendo la imagen como el punto en el que la recta que une el polo norte de la esfera y z del plano complejo corta la esfera.

$$\begin{gathered} N + \lambda\left(\overrightarrow{w - N}\right) \\ = (0,0,1) + \lambda(x_1, x_2, -1) \\ = (\lambda x_1, \lambda x_2, 1 - \lambda) \end{gathered}$$

de donde

$$\begin{aligned} &\lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 - 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \\ &\lambda(x_1^2 + x_2^2 + 1) = 2 \end{aligned}$$

y así

$$\lambda = \frac{2}{1 + |z|^2}$$

entonces

$$\omega = \left(\frac{2x_1}{1 - |z|^2}, \frac{2x_2}{1 - |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 - |z|^2}\right)$$

que nos permite concluir si recordamos cómo definimos $Im(z)$ y $Re(z)$.

Funciones complejas

Nos referimos a funciones con dominio e imagen en $\mathbb{C}$. Podríamos tener cualquiera de las siguientes:

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

todas como una generalización de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Normalmente trataremos con funciones $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analíticas y holomorfas.

Nota: Serán funciones $f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con Ω abierto.

En ocasiones veremos curvas o trayectorias en $\mathbb{C}$ de la forma

$$\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

Hay que distinguir entre imagen y trayectoria, pues trayectoria incluye velocidad.

$$t \longmapsto \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$$

donde $\{\gamma(t) | t \in \mathbb{R}\}$ es un objeto geométrico de dimensión real 1. Y, finalmente, cuando esté definida,

$$\gamma'(t) = \gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t)$$

Recordando que en $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

cuando el límite exista. La derivada en la complejos está más emparentada con la derivada en $\mathbb{R}$ que en $\mathbb{R}^2$.

Definición:

Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$.Diremos que $\lim_{n \to \infty} a_n$ existe y vale l si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_\varepsilon$ se cumple que

$$\sqrt{(a_n^1 - l^1)^2 + (a_n^2 - l^2)^2} = |a_n - l| < \varepsilon$$

análogo a que

$$\{(a_n^1, a_n^2)\}_n \longrightarrow (l^1, l^2)$$

en $\mathbb{R}^2$.

Definición: Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.Decimos que f tiende a A cuando $z \longrightarrow z_0$ si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

(Análogamente, con sucesiones, decimos que f tiende a A si y sólo si para toda sucesión $z_n \to z_0$, se cumple que $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$.)

es decir, si para todo $\varepsilon > 0$, existe δ tal que si $|z - z_0| < \delta$, se cumple que $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Decimos que $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ si para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $z \neq z_0$ y $|z - z_0| < \delta$, se tiene que $|f(z)| > M$.

Propiedades:

Sean $a = \lim_{z\to z_0} f(z)$ y $b = \lim_{z\to z_0} g(z)$, con $a, b \neq \infty$. Entonces las siguientes propiedades se satisfacen:

i) $\lim_{z\to z_0}\big(f(z) + g(z)\big) = a + b$

ii) $\lim_{z\to z_0}(f(z) \cdot g(z)) = ab$

iii) $\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{a}{b}$ si $b \neq 0$.

iv) si $\lim_{z\to z_0} f(z) = a$, entonces $\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \bar{a}$

v) $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} f(z_n) = \operatorname{Re}(a)$ y $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} f(z_n) = \operatorname{Im}(a)$.

Demostración:

ii) Sea $\varepsilon > 0$, veamos que

$$\begin{aligned}&|f(z)g(z) - ab| \leq |f(z)g(z) - f(z)b| + |f(z)b - ab|\\ &= |f(z)||g(z) - b| + |b||f(z) - a| \leq 2|a|\varepsilon_1 + |b|\varepsilon_2\end{aligned}$$

si $|z - z_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$

iii) Sea $\varepsilon > 0$ y δ tal que si $z \in D(z_0, \delta)$ entonces $f(z) \in D(a, \varepsilon)$.

$\left|\overline{f(a) - a}\right| = \left|\overline{f(z)} - \bar{a}\right| < \varepsilon$ pues $|z| = |\bar{z}|$.

Continuidad

Definición: Decimos que $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua en $z_0 \in \mathbb{C}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f\big(D(z_0, \delta)\big) \subset D(f(z_0), \varepsilon)$.

(Notemos que es equivalente a la definición de continuidad en $\mathbb{R}^2$.)

Esta definición es equivalente a que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Se dice que f es continua, si f es continua en todo su dominio.

Definición: Decimos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto si para toda $\omega \in \Omega$, existe $r > 0$ tal que $B_r(\omega) \subset \Omega$.

Corolario: Sean $f, g: \Omega \to \mathbb{C}$ continuas, con $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces las funciones $f + g$, fg y $\frac{f}{g}$ son continuas.

Derivación

Definición: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f: \Omega \to \mathbb{C}$. Decimos que f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ si existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} := f'(z_0)$$

Recordando la definición de la derivada de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, podemos ver que existen varias diferencias:

Sea $z_0 = (x_0, y_0)$. Decimos que g es diferenciable en z_0 si existe una transformación lineal $D_g\big((x_0, y_0)\big) \in \mathcal{M}_{2\times2}$ tal que

$$\lim \frac{g\big((x,y)\big) - g\big((x_0,y_0)\big) - \left[D_g\big((x_0,y_0)\big)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)\right]}{\big|\left|(x,y) - (x_0 - y_0)\right|\big|} = 0$$

Ejemplo:

Sea $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $z = x + iy \longmapsto x = Re(x)$ y $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) \longmapsto (x, 0)$.

Veamos que no existe la definición de f pues el límite es 1 y 0 dependiendo si nos movemos por el eje real o el eje imaginario.

Sin embargo, usando $D_g\big((0,0)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, vemos que se satisface la definición, por lo que sí existe la derivada.

Proposición: Sea $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{C}$. Entonces f no es derivable compleja en a o si lo es, entonces $f'(a) = 0$.

Demostración: Vamos a usar una idea que ya hemos usado antes: aproximarnos al punto por el eje real y después por el eje imaginario para ver que los límites son distintos. La pregunta es si existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (*)$$

Escogemos $z = z_0 + h, h \in \mathbb{R}$. Si existe $(*)$, existe

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

Por otra parte, si existe $(*)$, entonces existe

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih}\in\mathbb{C}$$

y ambas condiciones se dan si y sólo si $(*)=0$.

Definición: Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ un abierto y $f:\Omega\to\mathbb{C}$. Decimos que f es analítica si f es derivable (compleja) en todo $z\in\Omega$.

Se dice que f es analítica en $z_0\in\Omega$ si existe una vecindad abierta de z_0 o, equivalentemente, $D(z_0,\varepsilon),\varepsilon>0$, tal que

$$f_{|D(z_0,\varepsilon)}D(z_0,\varepsilon)\longrightarrow\mathbb{C}$$

es analítica.

Proposición: Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ un abierto y $f,g:\Omega\to\mathbb{C}$.

1) f es continua en Ω.
2) $f+g$ es analítica en Ω.
3) fg es analítica en Ω.
4) f/g es analítica en $\Omega\backslash\{\mathrm{z}|\mathrm{g}(\mathrm{z})=0\}$

Se deducen las propiedades análogas vistas para derivabilidad en $z_0\in\Omega$.

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ un abierto y $f:\Omega\to\mathbb{C}$.Entonces f se puede expresar de manera única como

$$f\big((x,y)\big)=U(x,y)+iV(x,y)$$

donde $U,V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$U\big((x,y)\big)\coloneqq Re\,f\big((x,y)\big)$$
$$V\big((x,y)\big)\coloneqq Im\,f\big((x,y)\big)$$

Si $f:\Omega\to\mathbb{C}$ en z, es decir, existe $\lim_{w\to z}\frac{f(z)-f(w)}{z-w}$, escogemos $h\in\mathbb{R}$ y en tal caso

$$f(z+h)-f(z)=f\big((x,y)+(h,0)\big)-f\big((x,y)\big)$$

y de ahí

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x}(z)=f'(z).$$

Observación:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial U}{dx}(z) + i\frac{\partial V}{\partial x}(z).$$

Ahora escogemos $h \in \mathbb{C}$ y en tal caso

$$f(z+ih) - f(z) = f\big((x,y) + (0,h)\big) - f\big((x,y)\big)$$

y procedemos de la misma manera

$$f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = \frac{\partial f}{i\partial y}(z) = -i\frac{\partial f}{dy}(z)$$
$$= -i\frac{\partial U}{dy}(z) + i(-i)\frac{\partial V}{dy}(z) = \frac{\partial V}{dy}(z) - i\frac{\partial U}{dy}(z)$$

y entonces

$$\frac{\partial U}{dx}(z) + i\frac{\partial V}{\partial x}(z) = \frac{\partial V}{dy}(z) - i\frac{\partial U}{dy}(z)$$

y, puesto que $f'(z)$ existe, implica

$$\frac{\partial V}{dy}(z) = Re\, f'(z) = \frac{\partial U}{dx}(z)$$

y

$$-\frac{\partial U}{\partial y}(z) = Im\, f'(z) = \frac{\partial V}{dx}(z)$$

De donde surgen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial V}{dy}(z) = \frac{\partial U}{dx}(z)$$

y

$$-\frac{\partial U}{\partial y}(z) = \frac{\partial V}{dx}(z)$$

Teorema: Si f es derivable compleja en z_0 y $f = U + iV$, entonces todas las parciales $\frac{\partial U}{x\partial}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial V}{dx}, \frac{\partial V}{dy}$ existen, porque los límites existen. Además, cumplen que

$$\frac{\partial V}{dy}(z) = \frac{\partial U}{dx}(z)$$

y

$$-\frac{\partial U}{\partial y}(z) = \frac{\partial V}{dx}(x)$$

De aquí, si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ y $f = U + iV$ es analítica, entonces las parciales en todo punto $z \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y

$$f'(z) = \frac{\partial U}{dx}(z) + i\frac{\partial V}{\partial x}(z)$$

además

$$\mathfrak{J}_{f(z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{dx}(z) & \frac{\partial U}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial V}{dx}(z) & \frac{\partial V}{dy}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{dx}(z) & -\frac{\partial V}{dx}(z) \\ \frac{\partial V}{dx}(z) & \frac{\partial U}{dx}(z) \end{pmatrix}$$

por las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Este número es de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

que coincide con las representaciones trabajadas al inicio.

Ahora, veamos que

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}(z)\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}(z)\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial y}(z)\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}(z)\right)$$

por las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Además, esto es igual a

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x}(z) & -\frac{\partial V}{\partial x}(z) \\ \frac{\partial V}{\partial x}(z) & \frac{\partial U}{\partial x}(z) \end{pmatrix}$$

$(*)$ Veremos que si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica, entonces $f': \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica. Si f es analítica en Ω, entonces

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U \partial V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial V \partial U}{\partial y \partial x}$$

donde la primera igualdad se da por las ecuaciones de Cauchy-Riemann y la segunda porque las parciales son continuas. Análogamente,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\partial V \partial U}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial V \partial U}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

y definimos

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

es decir, Uy V satisfacen la ecuación de Laplace.

Nota: Una función f es analítica si es diferenciable en sentido completo, es decir, existe un desarrollo de Taylor como serie de potencias. Una función f es holomorfa si existen las parciales. El objetivo del curso es probar que estas condiciones son equivalentes.

Suponiendo que si f es analítica en z_0, entonces f' también, queremos llegar a que esto se cumple para la derivada de cualquier orden.

Por continuidad de f' y aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{x}\right) \coloneqq \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}$$

y también

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{dy}\right) \coloneqq \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

y, por continuidad,

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

de donde

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

que es la definición de función armónica.

Concluimos que $f$analítica implica U, V son armónicas.

Definición: Sea $U: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica, existen sus derivadas de orden 2, son continuas y $\Delta U = 0$. Una función $U: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica que cumpla las ecuaciones de Cauchy-Riemann con U se llama conjugada armónica de U en A y es única salvo constante.

Si V es una conjugada armónica de U en A, entonces U es una conjugada armónica de $-V$ en A.

Ejemplo: Consideremos $U: x^2 - y^2$. ¿Es armónica? ¿En dónde?

Veamos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \qquad\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2y \qquad\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2$$

como son ambas continuas y suman 0, entonces U es armónica.

Su conjugada armónica cumple Cauchy-Riemann:

$$-2y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad\qquad 2x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

y así

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2y \Rightarrow V(x,y) = 2xy + C(y)$$

y como $2x = \frac{\partial V}{\partial y}$, tenemos

$$2x = \frac{\partial V}{\partial y} = 2x + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow V(x,y) = 2xy + C$$

de donde

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$f(z) = z^2$$

Teorema: Sean $U, V: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas en A, y tales que una es conjugada armónica de la otra en A. Entonces $f = U + iV$ es analítica.

Demostración: Como U, V tienen derivadas parciales continuas, entonces

$$\begin{aligned} f = (U,V)&: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \big(U(x,y), V(x,y)\big) \end{aligned}$$

es diferenciable.

$$Df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{dx}(x_0,y_0) & \frac{\partial U}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial V}{dx}(x_0,y_0) & \frac{\partial V}{dy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x}(x_0,y_0) & -\frac{\partial V}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial V}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial U}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

y existe

$$\lim \frac{f\big((x,y)\big) - f\big((x_0 - y_0)\big) - Df((x_0, y_0))\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}}{\|(x,y) - (x_0 - y_0)\|} = 0$$

puesto que

$$\mathbb{C} \leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\right\}$$

y

$$x + iy \leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

entonces

$$Df((x_0, y_0))\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$$

y existe también

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0$$

es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < 0$, entonces

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon|z - z_0|$$

si y sólo si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

que sucede si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < 0$, entonces

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{|z - z_0|}\right| < \varepsilon$$