Topología II

Enrique Ramírez Losada
Universidad de Guanajuato
Enero – Junio 2012

Eugenio Daniel Flores Alatorre

Temario

- Axiomas de separación
  - Lema de Urysolin
  - Teorema de Tietze
- Grupo fundamental
  - Homotopía de funciones
  - Definición
  - Propiedades
  - $\pi_1(S^1)$
- Paréntesis algebráico
  - Grupos libres
  - Generadores y relaciones
  - Presentaciones de grupos
  - Movidas de Tietze
- Teorema de Seifor-Van Kampen
  - Aplicaciones
- teorías de espacios cubrientes
  - Definición de espacio cubriente
  - Levantamiento de trayectorias y homotopías
  - Cubrientes regulares
  - Existencia de cubierta universal

Bibliografía

Hatcher: Algebraic Topology (Chap. 1)
www.math.cornell.edu/~Hatcher

Crowell, Fox: Introduction to knot theory (Chaps 1, 2, 3)
QA612.2 C76

Gray B. Homotopy theory, an introduction (Teorema S-VK)
QA612.7 67

Kosniowsky: A first course in algebraic topology
QA612 K68

Massey: Algebraic Topology, an introduction
QA612 M37

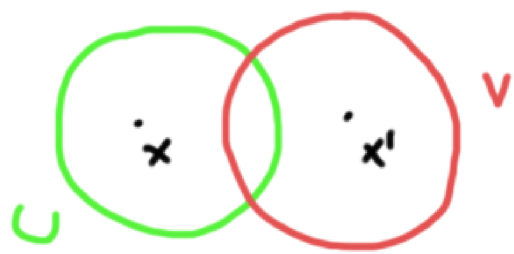
Munkres: Topology; Elements of algebraic topology

Axiomas de separación

Definición: T_0

Sea X espacio topológico. Decimos que X es T_0 ssi cualesquiera dos puntos $x, x' \in X$ $(x \neq x')$, existe un abierto U de X tal que $x \in U$ y $x' \notin U$ o $x' \in U$ y $x \notin U$.

Definición: T_1



Sea X espacio topológico. Decimos que X es T_1 ssi dados $x, x' \in X$ $(x \neq x')$ existen abiertos U, V de X tales que $x \in U, x' \notin U, x' \in V$ y $x \notin V$.

Observación: $T_1 \Rightarrow T_0$

Contraejemplo: $X = \{1,2\}$ con $\tau = \big\{\emptyset, X, \{1\}\big\}$. Entonces X es T_0 pero no es T_1.

Proposición: X es T_1 ssi todo conjunto finito de puntos de X es cerrado.

Esto es equivalente a pedir que los conjuntos de la forma $\{x\}$ con x punto, son cerrados.

Definición: T_2 o Hausdorff

Sea X espacio topológico. Decimos que X es T_2 ssi para cualesquiera dos puntos $x, x' \in X$ $(x \neq x')$ existen abiertos ajenos U, V tales que $x \in U$ y $x' \in V$.

Contraejemplo: X tal que $|X| \leq \omega$ y sea τ la topología cofinita. Entonces X es T_1 pero no es T_2.

Ejemplo:

Sea $X = \mathbb{R}$ y $\beta = \{U \backslash C | U \text{ abierto en } \mathbb{R} \text{ y } C \text{ es un conjunto contable } (|C| \leq \omega\}$. Probaremos que β es base de una topología.

1) Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B$.

Sea $B = \mathbb{R}$.

2) Sean $B_1, B_2 \in \beta$ y $x \in B_1 \cap B_2$. P.D. existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Sean $B_1 = U_1 \backslash C_1$ y $B_2 = U_2 \backslash C_2$. Veamos que

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \backslash C_1) \cap (U_2 \backslash C_2) = (U_1 \cap U_2) \backslash (C_1 \cup C_2) \in \beta$$

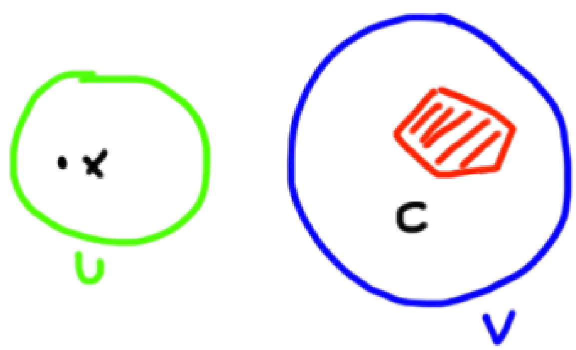
pues $|C_1 \cup C_2| \leq \omega$ ya que ambos son contables y $U_1 \cap U_2$ es un abierto en $\mathbb{R}$.

$\therefore \beta$ es base.

Sea τ la topología generada por β. Observación: τ es más fina que la topología estándar en $\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R}$ con la topología estándar es T_2 y τ es más fina, entonces $\mathbb{R}$ con τ es también T_2.

Definición: Regular



Sea X es espacio topológico. Decimos que X es regular ssi dados $x \in X$ y C cerrado en X, tales que $x \in X \backslash C$, existen U, V abiertos ajenos con $x \in U$ y $C \subset V$.

Contraejemplo: $(\mathbb{R}, \tau)$ es T_2 pero no es regular.

Observemos que $\mathbb{Q}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau)$. Sea $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ y sean U, V abiertos de $(\mathbb{R}, \tau)$ tales que $x \in U$ y $\mathbb{Q} \subset V$. Como $x \in U$ y U es abierto, existe un conjunto $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subset U$, pero $B_x = U_x \backslash C_x$ donde U_x es un abierto de $\mathbb{R}$ con la topología estándar. Por ser U_x un abierto de $\mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in U_x$.

Sea $V_q\backslash C_q \in \beta$ tal que $q \in V_q\backslash C_q \subset D$, cerrado. Como U_x y V_q son abiertos de $\mathbb{R}$ en la topología estándar, entonces $U_x \cap V_q$ es un abierto en esa topología y $q \in U_x \cap V_q$.De aquí, existe un intervalo (a,b) tal que $q \in (a,b) \subset U_x \cap V_q$, no numerable. Entonces $\left(U_x \cap V_q\right)\backslash\left(C_x \cup C_q\right) \neq \emptyset$.

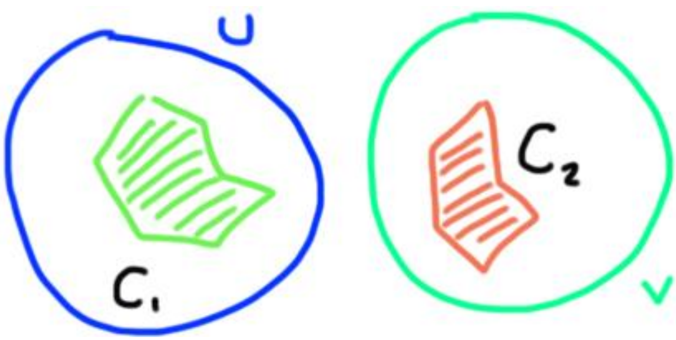
Como $\left(U_x \cap V_q\right)\backslash\left(C_x \cup C_q\right) = (U_x\backslash C_x) \cap \left(V_q\backslash C_q\right) \subset D \cap C$. Por lo tanto, $(\mathbb{R},\tau)$ no es regular.

Definición: Completamente regular

Sea X un espacio topológico. Decimos que X es completamente regular ssi dados $x \in X$ y C cerrado en X con $x \in X\backslash C$, existe una función continua $f: X \to I$, $I = [0,1]$, tal que $f(x) = 1$ y $f(C) = 0$.

Observación: Si X es completamente regular, entonces X es regular.

Definición: Normal



Sea X un espacio topológico. Decimos que X es normal ssi dados C_1, C_2 cerrados ajenos en X, existen U, V abiertos tales que $C_1 \subset U$ y $C_2 \subset V$.

Definición: T_3

Sea X un espacio topológico. Decimos que X es T_3 ssi X es regular y T_0

Contraejemplo: Espacio topológico que sí es regular pero no es T_0.

Sea X conjunto y τ la topología indiscreta. Si X tiene al menos un punto, X no es T_0 pero sí es regular y completamente regular (por vacuidad).

Algunos textos definen T'_3 como regular y T_1. Quisiéramos mostrar la equivalencia. Como $T_1 \Rightarrow T_0$, es fácil ver que $T'_3 \Rightarrow T_3$. Vamos a mostrar que $T_3 \Rightarrow T_2$ y así, como $T_2 \Rightarrow T_1$, acabamos.

Proposición: $T_3 \Rightarrow T_2$

Sean $x, x' \in X$ tales que $x \neq x'$. P.D.: existen abiertos ajenos U, V tales que $x \in U$ y $x' \in V$. Como X es T_0, sin pérdida de generalidad, existe un abierto U_x tal que $x \in U_x$ y $x' \notin U_x$. Veamos que $X\backslash U_x$ es cerrado y que $x \notin X\backslash U_x$. Como X es regular, existen abiertos U, V ajenos tales que $x \in U$ y $X\backslash U_x \subset V$, pero $x' \in X\backslash U_x \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto X es T_2.

Definición: Tychonoff

Sea X espacio topológico. Decimos que X es Tychonoff ssi X es completamente regular y T_0.

Definición: T_4

Sea X espacio topológico. Decimos que X es T_4 ssi X es normal y T_1.

Observación: Si X es Tychonoff, entonces X es T_3.

Lema de Urysohn

Decir que un espacio X es normal resulta ser una suposición muy fuerte. En particular, los espacios normales admiten muchas funciones continuas:

Teorema (Lema de Urysohn): Si A, B son conjuntos cerrados disjuntos de un espacio normal X, entonces existe una función continua $f: X \to [0,1]$ tal que para todo $a \in A$, $f(a) = 0$ y para todo $b \in B$, $f(b) = 1$.

Este lema tiene muchísimas grandes aplicaciones:

a) Teorema de metrizacíon de Urysohn. Si X es un espacio normal con una base contable (i. e. segundo-contable), entonces podemos usar la abundancia de funciones continuas de X en $[0,1]$ para asignarle coordenadas a los puntos de X para obtener un encaje de X en $\mathbb{R}^\omega$. De aquí, podemos ver que cada segundo-contable espacio normal es un espacio métrico.
b) Teorema de extensión de Tietze. Sea A un subconjunto de un espacio X y $f: A \to [0,1]$ una función continua. Si X es normal y A cerrado en X, entonces podemos encontrar una función de $g: X \to [0,1]$ tal que $g_{|A} = f$, es decir, g es una extensión de f en X.
c) Encaje de variedades en $\mathbb{R}^N$. Un espacio X es una n-variedad topológica si para cada punto $x \in X$, existe una vecindad abierta U_x tal que U_x es homeomorfo a una n-bola abierta.
   Desarrollando una herramienta llamada *particiones de unidad*, obtenemos el siguiente teorema: Toda n-variedad compacta es homeomorfa a un subespacio de algún $\mathbb{R}^N$.

Demostración: De alguna manera, tenemos que asociar un número $f(x)$ a cada punto $x \in X$. Más aún, nuestra función f tiene que ser continua (de otro modo la prueba sería trivial y el teorema no tendría contenido significante), mapear el conjunto A en el 0 y el conjunto B en el 1. Todo lo que sabemos de X es nuestra hipótesis de que es normal. Vamos a definir una gran colección de abiertos en X; entonces decidiremos para cada $x \in X$, qué debería ser $f(x)$ a partir de los conjuntos de la colección a los cuales pertenece o no.

Sea D el conjunto de los racionales dinámicos en $[0,1]$, es decir $D = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \dots\right\}$. Construiremos la secuencia de abiertos U_q, con índices $q \in D$.

Primero, sea $U_1 = X$. Puesto que X es normal, existen vecindades abiertas y disjuntas $U(A)$ y $V(B)$. Notemos que la existencia de V disjunta de U nos dice que $\overline{U} \cap B = \emptyset$, es decir, $\overline{U} \subset (X \backslash B)$. Sea U_0 esta vecindad $U(A)$. Entonces, para todos los subconjuntos subsecuentes U_q que definiremos, tendremos $A \subseteq U_q$; y para todo $q < 1$, $U_q \cap B = \emptyset$.

El conjunto cerrado $\overline{U_0}$ está contenido en el conjunto abierto $X \backslash B$. Dado que X es normal, existe un abierto (que llamaremos $U_{1/2}$) tal que

$$\overline{U_0} \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq (X \backslash B).$$

Continuamos de manera inductiva: interpolamos $U_{1/4}$ entre U_0 y $U_{1/2}$; interpolamos $U_{3/4}$ entre $U_{1/2}$ y $X \backslash V$; luego definimos $U_{1/8}, U_{3/8}$, etcétera.

Obtenemos una secuencia de abiertos U_q tales que

(1) Para cada $q \in D$, $A \subseteq U_q$.
(2) $B \subseteq U_1$ y para cada $q < 1$, $U_q \cap B = \emptyset$.
(3) Para cada $p, q \in D$ con $p < q$, tenemos que $\overline{U_p} \subseteq U_q$.

Ahora, definimos $f: X \to [0,1]$ como

$$f(x) = \inf \{ q | x \in U_q \}$$

para cada $x \in X$.

La función f está bien definida pues todo punto $x \in X$ pertenece a algún conjunto U_q, al menos a $U_1 = X$. Por la condición (1), $f(A) = 0$. Por la condición (2), $f(B) = 1$. (Observación, no estamos implicando que f es 0 únicamente en A o que f es 1 únicamente en B. En general, el conjunto 0 y el conjunto 1 serán mucho más grandes que sólo A o B.) Falta mostrar que f es continua.

Primero, establecemos dos lemas:

(a) Si $f(x) > q$, entonces $x \notin \overline{U}_q$.
(b) Si $f(x) < q$, entonces $x \in U_q$.

Para cada $x \in X$, sea $D(x) = \{ q | x \in U_q \}$. Entonces $f(x) = \inf D(x)$. Los números q y los conjuntos U_q están ordenados de la misma manera. Así, si $q \in D(x)$ y $q' > q$, entonces $q' \in D(x)$. El ínfimo $f(x)$ puede ser el menor de los elementos de $D(x)$ o puede ser un punto límite menor que no esté sí mismo en $D(x)$.

Prueba de (a): Si $f(x) > q$, debe haber algún hueco entre q y $D(x)$; en particular, existe algún q' tal que $q < q' < f(x)$. Pero $q' < f(x) \Rightarrow x \notin U_{q'}$, y entonces $\overline{U_q} \subseteq U_{q'} \Rightarrow x \notin \overline{U}_q$.

Prueba de (b): Si $f(x) < q$, entonces existe $q' \in D(x)$ tal que $f(x) < q' < q$, en cuyo caso $q \in D(x)$, así que $x \in U_q$.

Ahora podemos mostrar que f es continua. Necesitamos mostrar que la pre-imagen de todo sub básico $(a, 1]$ o $[0, a)$ es abierto en X. Supongamos primero que $f(x) \in (a, 1]$. Elegimos algún q con $a < q < f(x)$. Afirmamos que el conjunto abierto $W = X \backslash \overline{U}_q$ es una vecindad de x que es mapeada por f en $(a, 1]$. Primero, por (a), $f(x) > q \Rightarrow x \in W$, así que W es una vecindad de x. Si y es cualquier punto de W, entonces $f(y) \geq q > a$; de otro modo, , si $f(y) < q$, entonces, por (b), $y \in U_q \subseteq \overline{U}_q$.

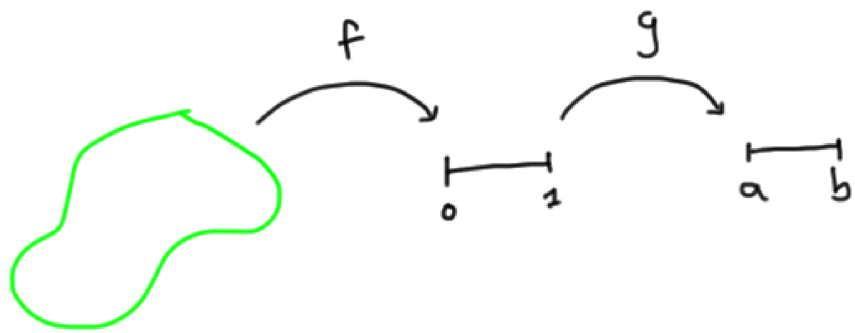
El argumento es mucho más simple para $f^{-1}[0, b)$. Supongamos que $f(x) < b$ y elegimos q tal que $f(x) < q < b$. Por (b), $x \in U_q$. Afirmamos que la vecindad U_q es mapeada por f en $[0, b)$. Supongamos que y es cualquier punto de U_q. Entonces $q \in D(y)$, así que $f(y) \leq q < b$.

Hemos probado que X es normal si y sólo si para cualesquiera dos cerrados disjuntos A, B existe una función continua $f: X \longrightarrow I$ tal que $f_{|A} = 0$ y $f_{|B} = 1$.

Corolario: Si X es T_4, entonces es Tychonoff.

Demostración: X es T_4 si y sólo si es Normal y T_1. Recordemos que en T_1, $\{x\} = \overline{\{x\}}$.

Observación: Podemos sustituir I por cualquier intervalo cerrado.



Sea $g(x) = (b - a)x + a$. Como la composición de funciones es continua, $g^\circ f: X \rightarrow [a, b]$ es continua.

Tenemos una cadena de implicaciones: $T_4 \Rightarrow Tychonoff \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

Observación: No todos los autores manejan estos mismos axiomas de separación para las clasificaciones dadas. Por ejemplo, Steen y Seebach en *Counterexamples in Topology* trabajan según los siguientes axiomas de separación:

> T_0: Si $a, b \in X$, entonces existe un abierto U tales que ya sea $a \in U$ y $b \notin U$ o bien $a \notin U$ y $b \in U$.
>
> T_1: Si $a, b \in X$, entonces existen abiertos U_a, U_b de a, b respectivamente tales que $a \notin U_b$ y $b \notin U_a$.
>
> T_2: Si $a, b \in X$, entonces existen abiertos disjuntos U_a, U_b de a, b respectivamente.

T_3: Si A es cerrado en X y $b \notin A$ un punto, entonces existen abiertos disjuntos U_A, U_b de A, b respectivamente.

T_4: Si A, B son cerrados disjuntos en X, entonces existen abiertos disjuntos U_A, U_B de A, B respectivamente.

T_5: Si A, B son conjuntos separados en X, entonces existen abiertos disjuntos U_A, U_B de A, B respectivamente.

Además, considera las siguientes definiciones:

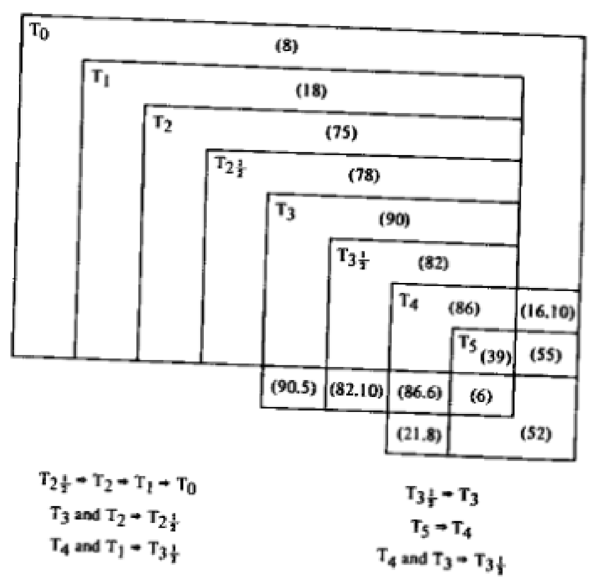
Regular: Si y sólo si es T_0 y T_3.

Normal: Si y sólo si es T_1 y T_4.

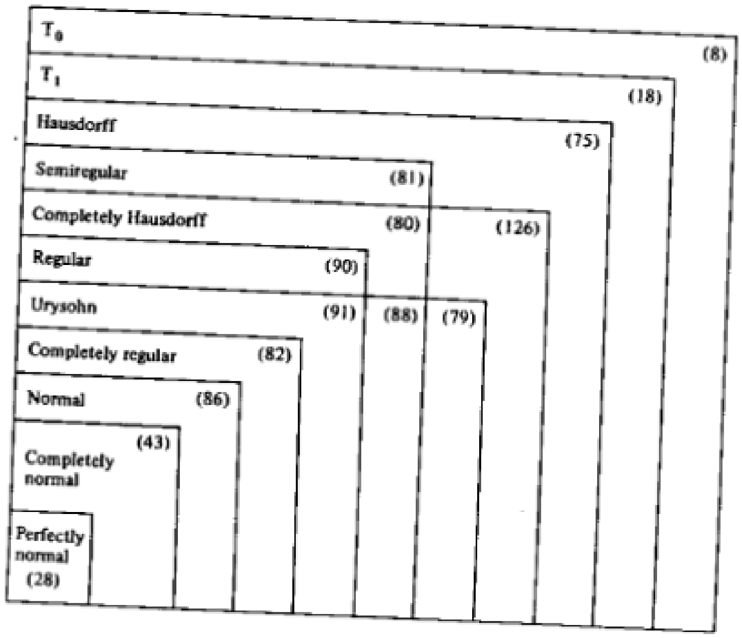
Las definiciones de estos autores no coinciden con las que seguiremos durante el curso. Veamos, por ejemplo, que bajo esta definición, los conceptos de Regular y T_3 están intercambiados, lo mismo que Normal y T_4. Sin embargo, bajo estas definiciones, se tienen las siguientes implicaciones:

$$\text{Normal} \Rightarrow \text{Regular} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

que coincide con nuestra cadena. Además, esta práctica tabla de contenciones e implicaciones:



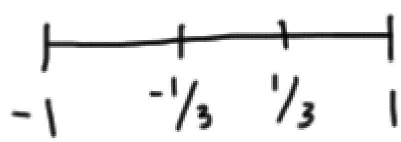
y la siguiente tabla que se extiende para incluir las definiciones que hacen falta –y muchas otras que no estamos considerando en el curso:



Teorema de extensión de Tietze

Sea X un espacio topológico normal y Y un subespacio cerrado de X. Entonces, para toda función continua $f: Y \longrightarrow [-1,1]$, existe una función continua $F: X \longrightarrow [-1,1]$ tal que $F_{|Y} = f$.

Demostración: Dividimos el intervalo en los siguientes sub intervalos.



Sean $I_1 = f^{-1}[-1, -1/3]$, $I_2 = f^{-1}[-1/3, 1/3]$, $I_3 = f^{-1}[1/3, 1]$.

Entonces I_1 y I_3 son cerrados en Y, pero como Y es cerrado en X, entonces I_1 e I_3 son cerrados en X y $I_1 \cap I_3 = \emptyset$. Entonces existe una función continua $g_0: X \rightarrow [-1/3, 1/3]$.

$$|g_0(x)| \leq 1/3 \text{ para toda } x \in X$$

Calculemos $|f - g_0|$:

i) Si $x \in I_1$, $f(x) - g_0(x) \leq -2/3$ pues $f(x) \leq -1$ y $g_0(x) \leq -1/3$.

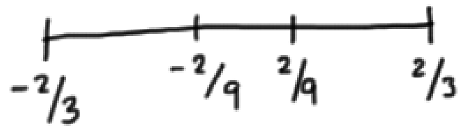
ii) Si $x \in I_3$, $f(x) - g_0(x) \leq 2/3$ pues $f(x) \leq 1$ y $g_0(x) \leq 1/3$.

iii) Si $x \notin I_1 \cup I_3$, entonces $f(x) - g_0(x) \leq 2/3$ pues es la máxima diferencia.

Por lo tanto $|f - g_0| \leq 2/3$.

Ahora, definimos

$$(f - g_0)\colon Y \to [-{}^{2}/_{3}, {}^{2}/_{3}]$$



Sean $J_1 = (f - g_0)^{-1}[-{}^{2}/_{3}, -{}^{2}/_{9}], J_2 = (f - g_0)^{-1}[-{}^{2}/_{9}, {}^{2}/_{9}], I_3 = (f - g_0)^{-1}[{}^{2}/_{9}, {}^{2}/_{3}]$.

Entonces J_1, J_3 cerrados en X (primero en Y) y $J_1 \cap J_3 = \emptyset$. Entonces existe $g_1\colon X \to [-{}^{2}/_{9}, {}^{2}/_{9}]$ continua tal que $g_{1_{|J_1}} = -{}^{2}/_{9}$ y $g_{2_{|J_2}} = {}^{2}/_{9}$.

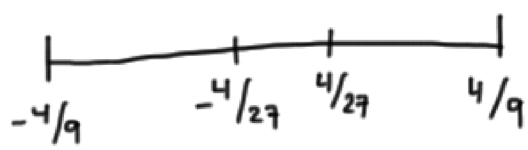
Entonces

$$|g_1(x)| \leq {}^{2}/_{9} = ({}^{1}/_{3})({}^{2}/_{3})^{1}$$

de donde

$$|f(x) - g_0(x) - g_1(x)| \leq ({}^{2}/_{3})^{2} = {}^{4}/_{9}.$$

Consideramos ahora $(f - g_0 - g_1)\colon Y \to [-{}^{4}/_{9}, {}^{4}/_{9}]$



Y sean $K_1 = (f - g_0 - g_1)^{-1}[-{}^{4}/_{9}, -{}^{4}/_{27}], K_2 = (f - g_0 - g_1)^{-1}[-{}^{4}/_{27}, {}^{4}/_{27}], K_3 = (f - g_0 - g_1)^{-1}[{}^{4}/_{27}, {}^{4}/_{9}]$.

De manera análoga a las anteriores, como K_1 y K_2 son cerrados en X y $K_1 \cap K_3 = \emptyset$, existe $g_2\colon X \to [-{}^{4}/_{27}, {}^{4}/_{27}]$ continua, tal que $g_2|_{K_1} = -{}^{4}/_{27}$ y $g_2|_{K_3} = {}^{4}/_{27}$.

Entonces

$$|g_2(x)| \leq {}^{4}/_{27} = ({}^{1}/_{3})({}^{2}/_{3})^{2}$$

y

$$|f(x) - g_0(x) - g_1(x) - g_2(x)| \leq ({}^{2}/_{3})^{3}$$

Si continuamos inductivamente, tenemos una función continua

$$g_n\colon X \to \left[-({}^{1}/_{3})({}^{2}/_{3})^{n}, ({}^{1}/_{3})({}^{2}/_{3})^{n}\right]$$

tal que

$$|g_n(x)| \leq \left({}^{1}/_{3}\right)\left({}^{2}/_{3}\right)^n$$

y

$$\left|f(x) - \sum\nolimits_{i=0}^{n} g_i(x)\right| \leq \left({}^{2}/_{3}\right)^{n+1}$$

para toda $x \in Y$. Sea

$$F(x) = \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} g_i(x)$$

Por demostrar:

- $F: X \to [-1, 1]$
- $F|_Y = f$
- f es continua

Primero, veamos que $|g_n(x)| \leq \left({}^{1}/_{3}\right)\left({}^{2}/_{3}\right)^n$, de donde

$$\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1$$

que converge, entonces g_i converge. Además,

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)\right| \leq 1$$

por lo que $F: X \to [-1,1]$.

Como

$$\left|f(x) - \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)\right| \leq \left({}^{2}/_{3}\right)^{n+1}$$

para toda $x \in Y$, entonces si $n \to \infty$, $\left({}^{2}/_{3}\right)^{n+1} \to 0$. Así que $F|_Y = f$.

Por último,

$$\left|F - \sum_{i=0}^{n} g_i(x)\right| = \left|\sum_{i=0}^{\infty} g_i(x) - \sum_{i=0}^{n} g_i(x)\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} g_i(x)\right| \leq \frac{1}{3}\sum_{i=n+1}^{\infty}\left({}^{2}/_{3}\right)^i$$

$$\leq \left(2/_3\right)^n \left[\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(2/_3\right)^i\right] \leq \left(2/_3\right)^n$$

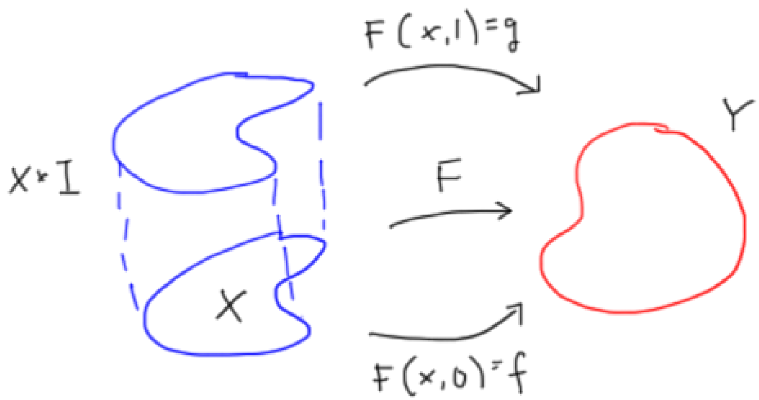
así que, para toda $x \in X$,

$$\left|F - \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)\right| \leq \left(2/_3\right)^n$$

converge uniformemente. Recordando que la convergencia uniforme de funciones continuas es continua, concluimos que F es continua.

Homotopías de funciones

Definición: Sean X, Y espacios topológicos y $f, g: X \to Y$ funciones continuas. Decimos que f es homotópica a g si y sólo si existe una función continua $F: X \times I \to Y$ con $I = [0, 1]$, tal que $F(x, 0) = f$ y $F(x, 1) = g$.



A la función F se le llama homotopía entre f y g.

Ejemplo 1: Sean $X = \mathbb{R}^n = Y$ y $f: X \to Y$ tal que $f(x) = 0$ y $g: X \to Y$ tal que $g(x) = x$. Definimos $F: \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ tal que $F(x, t) = tx, F(x, 0) = 0$ y $F(x, 1) = x = g(x)$.

Ejemplo2: Sea X un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y sean $f: X \to X$ definida como $f(x) = x_o \in X$ y $g: X \to X$ definida como $g(x) = x$. Definimos $F: X \times I \to X$ tal que $F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$.

Definición: Sea X espacio topológico. Decimos que X es contráctil (contraíble) si y sólo si la función identidad en X es homotópica a la función constante $f: X \to X, f(x) = c \in X$.

Notación: Si f es homotópica a g, escribimos $f \simeq g$.

Proposición: La relación $\simeq$ es de equivalencia.
1) $f \simeq f$

2) $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$
3) $f \simeq g, g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$.

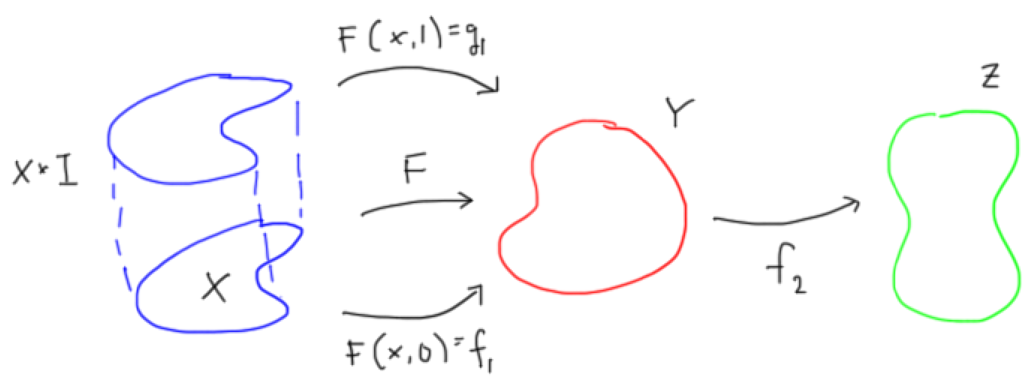
Demostración:

1) Supongamos $f: X \longrightarrow Y$. Sea $F: X \times I \longrightarrow Y$ tal que $F(x,t) = f(x)$.
2) Supongamos que $f \simeq g$, con $f, g: X \to Y$ continuas. Existe una función continua $F: X \times I \to Y$ tal que $F(x,0) = f$ y $F(x,1) = g$. Sea $G: X \times I \to Y$ definida como $G(x,t) = F(x, 1-t)$ es continua pues F lo es y $G(x,0) = F(x,1) = g(x)$ y $G(x,1) = F(x,0) = f(x)$. Entonces G es una homotopía entre g y f.
3) Suponemos $f \simeq g$ y $g \simeq h$. P. D. $f \simeq h$. Las funciones $f, g, h: X \to Y$ son continuas. Existe $F: X \times I \to Y$ continua, tal que $F(x,0) = f$ y $F(x,1) = g$ y existe $G: X \times I \to Y$ continua, tal que $G(x,0) = g$ y $G(x,1) = h$.
   Sea $H: X \times I \to Y$ definida como
$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & si\ 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x,2t-1) & si\ 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$
   Entonces $H(x,0) = F(x,0) = f$ y $H(x,1) = G(x,1) = h$.
   Concluimos que $f \simeq h$.

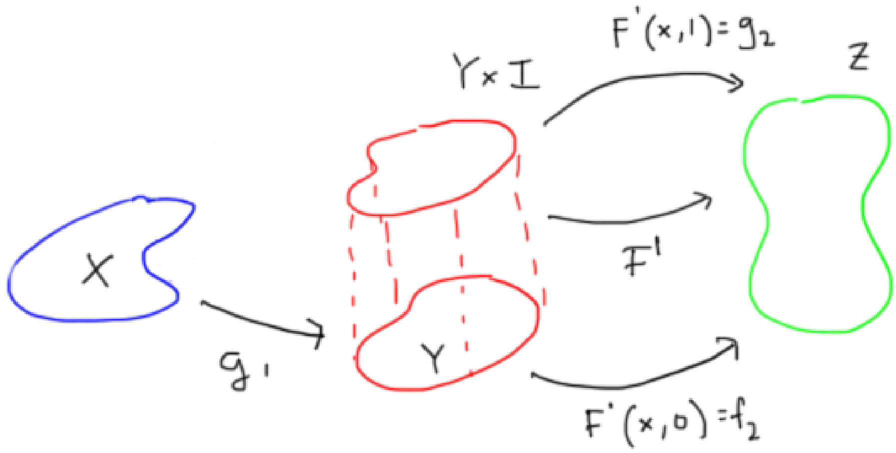
Proposición: Sean X, Y, Z espacios topológicos y $f_1, g_1: X \to Y$ funciones continuas y $f_2, g_2: Y \to Z$ funciones continuas. Si $f_1 \simeq g_1$ y $f_2 \simeq g_2$, entonces $f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$.

Demostración: Probaremos que $f_2 \circ g_1 \simeq f_2 \circ f_1$ y luego que $f_2 \circ g_1 \simeq g_2 \circ g_1$, lo cual nos da la conclusión por transitividad.

P. D. $f_2 \circ g_1 \simeq f_2 \circ f_1$; como $f_1 \simeq g_1$, existen $F: X \times I \to Y$ continua tal que $F(x,0) = f_1$ y $F(x,1) = g_1$. Sea $G: X \times I \to Z$ definido como $G = f_2 \circ F$ y funciona.



P. D. $f_2 \circ g_1 \simeq g_2 \circ g_1$. Definimos $\bar{g}_1: X \times I \to Y \times I$ como $\bar{g}_1(x,t) = (g_1(x), t)$ es continua pues las funciones coordenadas son continuas. Sea $H = F' \circ \bar{g}_1$, también es continua pues es la composición de funciones continuas. Además, $H(x,0) = F'(\bar{g}_1(x), 0) = f_2(g_1(x))$ y $H(x,1) = F'(g_1(x), 1) = g_2(g_1(x))$ como queríamos.



Definición: Sean X, Y espacios topológicos. Decimos que X es del mismo tipo de homotopía que Y (es homotópicamente equivalente a Y) si y sólo si existen funciones continuas $f: X \longrightarrow Y$ y $g: Y \longrightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq \mathbb{I}_X$ y $f \circ g \simeq \mathbb{I}_Y$.

Si X e Y son homeomorfos, entonces son del mismo tipo de homotopía.

Observación: el regreso es falso. Un ejemplo es que $\mathbb{R}^n$ tiene el mismo tipo de homotopía que un punto. En general, los convexos son homotópicamente equivalentes a un punto.

Proposición: Sea X espacio topológico. X es contráctil si y sólo si tiene el mismo tipo de homotopía que un punto.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos X contráctil, es decir $\mathbb{I}_X \simeq c$ con $c: X \longrightarrow X$ tal que $c(x) = x_0 \in X$ para todo $x \in X$.

P.D. Existen $f: X \to \{x_0\}$ y $g: \{x_0\} \to X$ continuas tales que $f \circ g \simeq \mathbb{I}_X$ y $g \circ f \simeq \mathbb{I}_X$.

Hacemos g la inclusión de $\{x_0\}$ en X, i. e., $g(x_0) = x_0$ Luego, $f \circ g: \{x_0\} \to \{x_0\}$ donde $f \circ g \simeq \mathbb{I}_X$ por definición y $g \circ f: X \to X$, $g \circ f(x) = x_0$ para todo $x \in X \Rightarrow g \circ f = c$, y como $c = \mathbb{I}_X$ concluimos que $g \circ f \simeq \mathbb{I}_X$.

$\Leftarrow$) Supongamos que X es homotópicamente equivalente a un punto.

P.D. X es contráctil.

Sea $x_0 \in X$ y sean $f: X \to \{x_0\}$ y $g: \{x_0\} \to X$. Por hipótesis, $g \circ f \simeq \mathbb{I}_X$ pero $g \circ f = x_0$ para todo $x \in X$. Entonces $g \circ f$ es función constante en x_0.

Retractos

Definición: Sea X espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es retracto de X (o que X se retrae a A) si y sólo si existe una función continua $r: X \longrightarrow A$ tal que $r \circ i = \mathbb{I}_A$, donde $i: A \hookrightarrow X$ es la inclusión; o bien, si $r|_A = \mathbb{I}_A$.

A r se le llama retracción.

Definición: Sea X espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es un retracto por deformación de X si y sólo si A es retracto de X y $r \circ i \simeq \mathbb{I}_A$. Es decir, existe una homotopía F entre $r \circ i$ y $\mathbb{I}_A$, $F: X \times I \longrightarrow X$ tal que $F(x, 0) = r \circ i$ y $F(x, 1) = \mathbb{I}_A$.

Ejemplo: Sea $S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ y sea
$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Sea $i: S^1 \hookrightarrow C$ la inclusión y definimos $r: C \longrightarrow S^1$ como $r(x, y, z) = (x, y, 0)$ y $r \circ i = \mathbb{I}_{S^1}$. Por lo tanto, S^1 es retracto de C.

Sea $F: C \times I \to C$ la función $F(x, y, z, t) = (x, y, tz)$, continua. Veamos que

$$F(x, y, z, 0) = (x, y, 0)$$

y también

$$i \circ r(x, y, z) = i(x, y, 0) = (x, y, 0)$$

y, por último,

$$F(x, y, z, 1) = (x, y, z) = \mathbb{I}_C.$$

Definición: Sea X espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es retracto por deformación fuerte de X si y sólo si A es retracto por deformación y la homotopía F entre $i \circ r$ y $\mathbb{I}_X$ es tal que $F(a, t) = a$ para todo $t \in I, a \in A$.

Definición: Sean X, Y espacios topológicos y sean $f, g: X \to Y$ tales que $f|_A = g|_A$ donde $A \subset X$. Decimos que f es homotópicamente equivalente a g relativa al subconjunto A si y sólo si existe una homotopía $F: X \times I \to Y$ tal que $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$ y $F(a, t) = f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$.

Si f es homotópicamente equivalente a g relativo a A, escribimos

$$f \simeq g \; relA$$

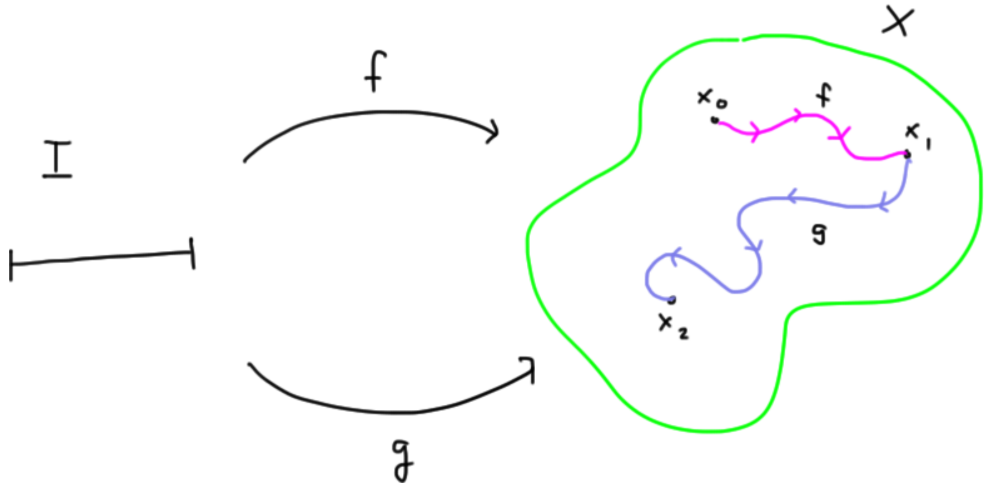
Nota: $\simeq$ es una relación de equivalencia.

Trayectorias

Definición: Sea X un espacio topológico y sean $x_0, x_1 \in X$. Decimos que $f: I \to X$ es una trayectoria si y sólo si f es continua y $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$.

Si $f(0) = f(1)$, decimos que f es un lazo.

Definición: Producto de trayectorias.

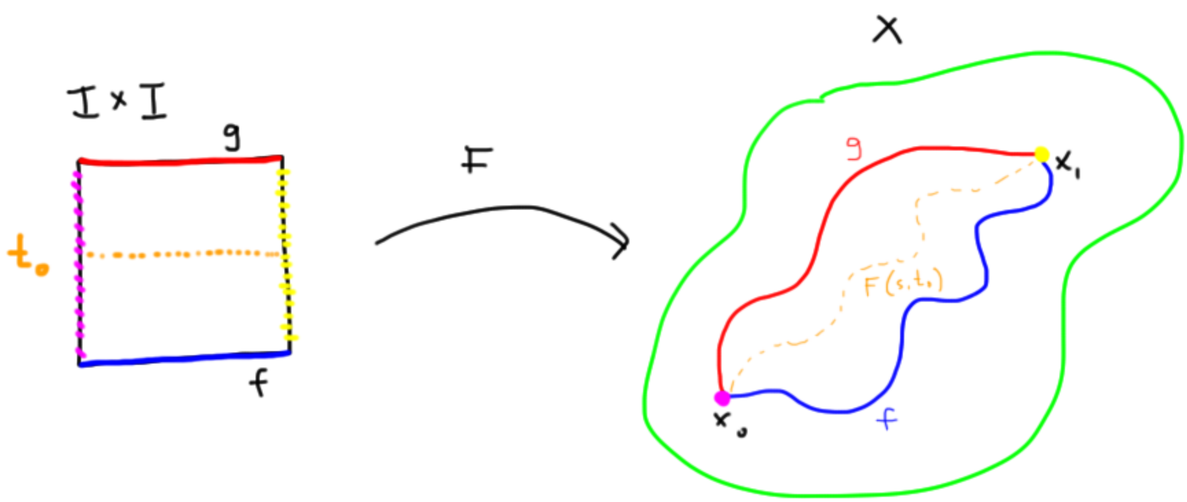


Sean X, Y espacios topológicos y sean $f, g: I \to X$ trayectorias tales que $f(0) = x_0, f(1) = x_1 = g(0), g(1) = x_2$ donde $x_0, x_1, x_2 \in X$. Definimos el producto de f, g como

$$f \cdot g(t) = \begin{Bmatrix} f(2t) & 0 \leq t \leq {}^1\!/_2 \\ g(2t-1) & {}^1\!/_2 \leq t \leq 1 \end{Bmatrix}$$

Definición: Sea X espacio topológico y $f, g: I \to X$ trayectorias tales que $f(0) = x_0 = g(0)$ y $f(1) = x_1 = g(1)$. Decimos que f es equivalente a g si y sólo si f es homotópicamente equivalente a g relativo a $\{0, 1\}$.

Es decir, si y sólo si existe una homotopía $F: I \times I \to X$ tal que $F(s, 0) = f(s), F(s, 1) = g(s)$ y además $F(0, t) = x_0 = f(0) = g(0)$ y $F(1, t) = x_1 = f(1) = g(1)$.



Si f equivalente a g escribimos

$$f \simeq g\, rel\{0,1\}$$

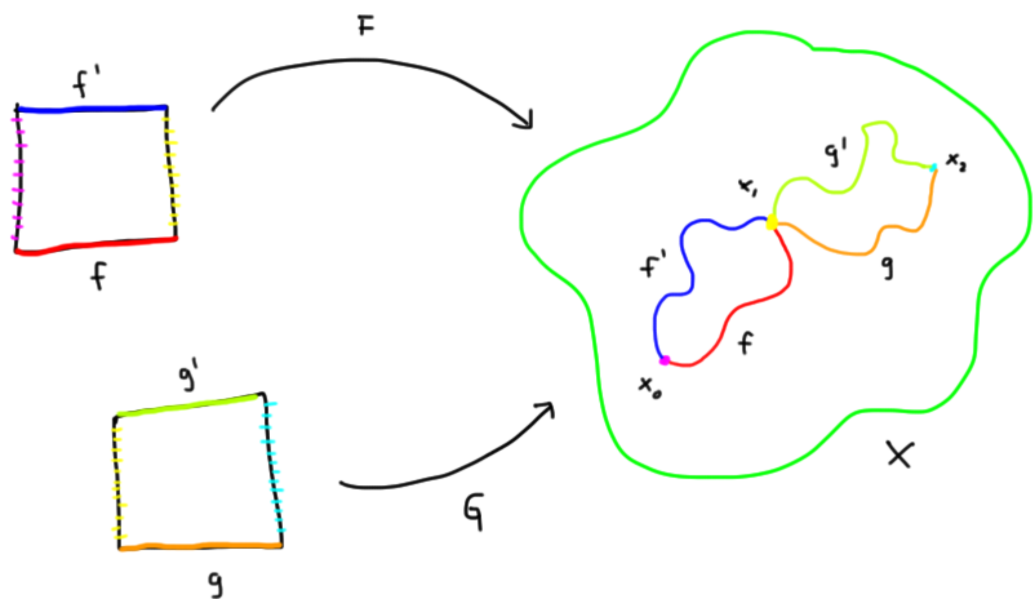
Proposición: Sea X espacio topológico y $f, g, f', g': I \to X$ trayectorias tales que

$$f(0) = x_0 = f'(0)$$
$$f'(1) = f(1) = x_1 = g(0) = g'(0)$$
$$g(1) = x_2 = g'(1)$$

Supongamos que $f \simeq f' rel\{0,1\}$ y que $g \simeq g' rel\{0,1\}$. Entonces,

$$f \cdot f' \simeq g \cdot g'\, rel\{0,1\}$$

Demostración: Sea $F: I \times I \to X$ tal que $F(s,0) = f(s), F(s,1) = f'(0)$ y además, $F(0,t) = x_0$ y $F(1,t) = x_1$, es decir, F es la homotopía entre f y f'. Adicionalmente, sea $G: I \times I \to X$ tal que $G(s,0) = g(s), G(s,1) = g'(s)$ y además $G(0,t) = x_1$ y $G(1,t) = x_2$, es decir, G es la homotopía entre g y g'.



Definimos $H: I \times I \to X$ como

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

por el lema del pegado, H es continua.

Veamos que se cumple:

$$H(0,t) = F(0,t) = x_0 = \begin{matrix} f(0) = f \cdot g(0) \\ f'(0) = f' \cdot g'(0) \end{matrix}$$

$$H(1,t) = G(1,t) = x_2 = \begin{matrix} g(1) = f \cdot g(1) \\ g'(1) = f' \cdot g'(1) \end{matrix}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Recordemos rápidamente el Lema del Pegado:

Lema (del pegado): Sea X un espacio topológico tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ donde X_i son subespacios cerrados. Si para algún espacio Y y para cada $i = 1, \dots n$ existe una función continua $f_i: X_i \to Y$ tal que $f_i|_{X_i \cap X_j} = f_i|_{X_i \cap X_j}, i \neq j$, entonces existe una única función continua $f: X \to Y$ con $f|_{X_i} = f_i$ para todo $i = 1, \dots n$.

Observación: Si $f: I \to X$ trayectoria tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$ con $x_0, x_1 \in X$,definimos los neutros multiplicativos de f como:

$e_{x_0}: I \to X$ tal que $e_{x_0}(t) = x_0$

$e_{x_1}: I \to X$ tal que $e_{x_1}(t) = x_1$

que cumplen que

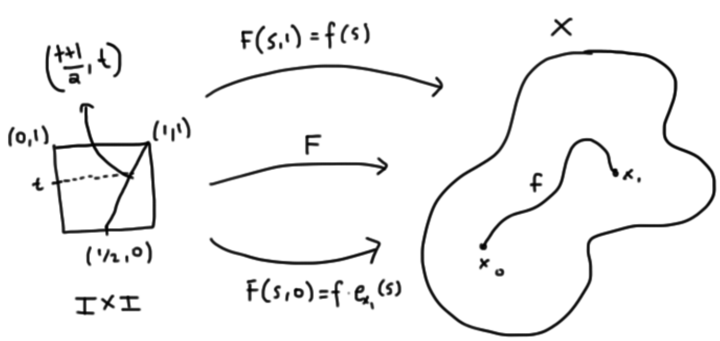
$$e_{x_0} \cdot f \simeq f\ rel\{0,1\}$$

$$f \cdot e_{x_0} \simeq f\ rel\{0,1\}$$

Definición: Sea $f: I \to X$ una trayectoria tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$. Definimos $f^{-1}: I \to X$ como

$$f^{-1}(t) = f(1-t)$$

Inversos

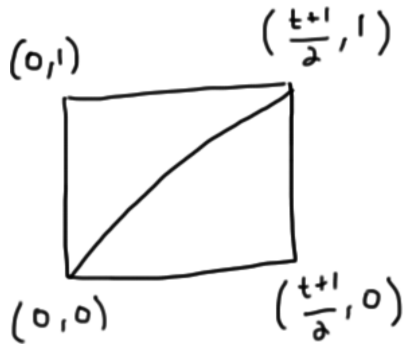


Calculamos la ecuación de la recta:

$$m = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \qquad t = 2\left(s - {}^{1}/_{2}\right) = 2s - 1, \qquad s = \frac{t+1}{2}$$

Definimos la transformación

$$\varphi\colon \left[0, \frac{t+1}{2}\right] \to [0,1]$$
$$\varphi(s) = \frac{2}{t+1} s$$



y entonces

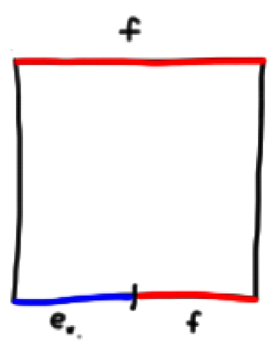
$$F(s,t) = \begin{cases} f\left(\dfrac{2s}{t+1}\right) & 0 \le s \le \dfrac{t+1}{2} \\ \\ e_{x_1}(s) & \dfrac{t+1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

y sabemos que F es continua por el lema del pegado.

$$F(s,0) = \begin{cases} f(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \\ e_{x_1} & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$f(s,1) = f(s), \qquad 0 \le s \le 1$$

y hacemos el diagrama para el otro inverso



Notación: En ocasiones escribiremos $\bar{f} = f^{-1}$.

Proposición: Sean $f, g, h\colon I \to X$ trayectorias tales que

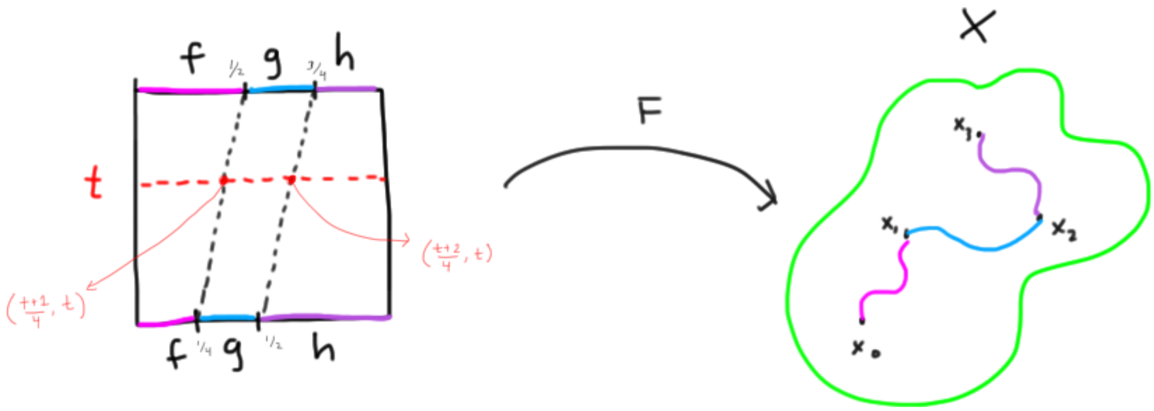
$$f(0) = x_0$$

$$f(1) = x_1 = g(0)$$
$$g(1) = x_2 = h(0)$$
$$h(1) = x_3$$

donde $x_0, x_1, x_2, x_3 \in X$. Entonces

$$(f \cdot g) \cdot h \simeq f \cdot (g \cdot h)\, rel\{0,1\}$$

Demostración: Queremos demostrar que existe una homotopía $F: I \times I \to X$ tal que $F(s,0) = (f \cdot g) \cdot h(s), F(s,1) = f \cdot (g \cdot h)(s)$.



Definimos

$$\varphi: \left[0, \frac{t+1}{4}\right] \to [0,1], \qquad \varphi(s) = \frac{4s}{t+1}$$

$$\gamma: \left[\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}\right]: \to [0,1], \qquad \gamma(s) = 4s - t - 1$$
$$\rho: \left[\frac{t+2}{4}, 1\right]: \to [0,1], \qquad \rho(s) = \frac{4}{2-t}(s-1) + 1$$

y, por último,

$$F(s,t) = \left\{ \begin{array}{cc} f\left(\dfrac{4s}{t+1}\right) & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4} \\ g(4s - t - 1) & \frac{t+1}{2} \leq s \leq \frac{t+2}{4} \\ h\left(\dfrac{4s}{2-t}(s-1) + 1\right) & \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1 \end{array} \right\}$$

sabemos que $F(s,t)$ es continua por el lema del pegado. Además

$$F(s,0)=\begin{cases} f(4s) & 0\le s\le \frac{1}{4} \\ g(4s-1) & \frac{1}{4}\le s\le \frac{1}{2} \\ h(2s-1) & \frac{1}{2}\le s\le 1 \end{cases}$$

$$F(s,1)=\begin{cases} f(2s) & 0\le s\le \frac{1}{2} \\ g(4s-2) & \frac{1}{2}\le s\le \frac{3}{4} \\ h(4s-3) & \frac{3}{4}\le s\le 1 \end{cases}$$

por lo tanto, el producto es asociativo.

Definición: Sea $f: I \to X$ una trayectoria. Decimos que f es un lazo si y sólo si $f(0) = f(1)$. Si $f(0) = x = f(1)$, decimos que es un lazo basado en x.

Notación: Sea X un espacio topológico y $x \in X$. El conjunto de clases de equivalencia de lazos $(f \simeq g \;\; rel\{0,1\})$ lo denotamos por

$$\pi_1(X,x)$$

Proposición: Sea X espaciotopológico y $x \in X$. Definimos el producto de dos clases de lazos basados en x, $[f], [g]$, como $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$

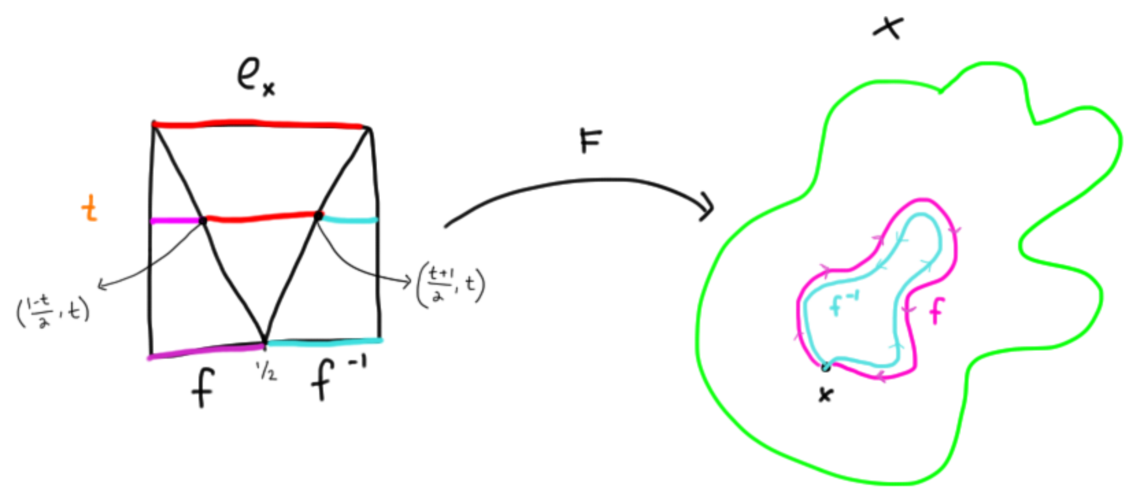
Entonces, el conjunto $\pi_1(X,x)$ es un grupo con esta operación.

Demostración:

0) El producto está bien definido (demostrado por la proposición anterior).
1) $\pi_1(X,x)$ es cerrado con esta operación.
2) El producto es asociativo (demostrado por la proposición anterior).
3) Existe un neutro multiplicativo $e_x(t) = x$

$$[e_x][f] = [e_x f] = [f] = [f e_x] = [f][e_x]$$

4) Sea $[f] \subset \pi_1(X,x)$, entonces existe f^{-1} definido como $f^{-1}(t) = f(1-t)$ y $[f][f^{-1}] = [e_x] = [f^{-1}][f]$.



$$F(s,t) = \begin{Bmatrix} f\left(\dfrac{2s}{1-t}\right) & 0 \leq s \leq \dfrac{1-t}{2} \\ e_x & \dfrac{1-t}{2} \leq s \leq \dfrac{t+1}{2} \\ f^{-1}\left(\dfrac{2s-t-1}{1-t}\right) & \dfrac{t+1}{2} \leq s \leq 1 \end{Bmatrix}$$

habiendo definido

$$\varphi(s) = \frac{2s}{1-t}$$
$$\sigma(s) = \frac{2s-t-1}{1-t}$$

de nuevo, sabemos que $F(s,t)$ es continua por el lema del pegado, y también

$$F(s,0) = \begin{Bmatrix} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ e_x & s = \frac{1}{2} \\ f^{-1}(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{Bmatrix}$$

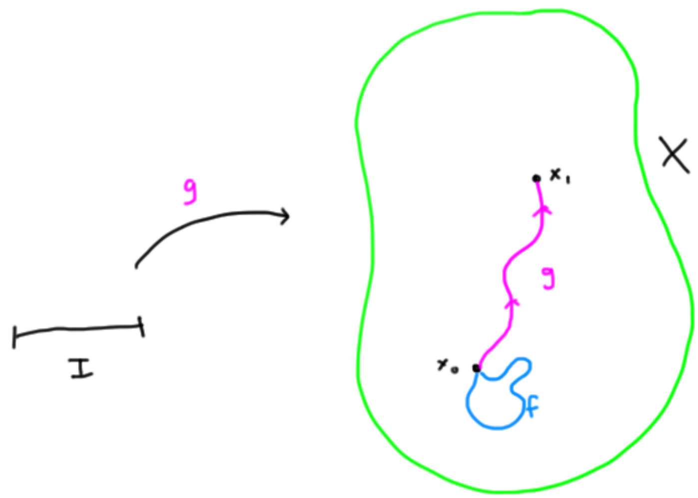
siempre que $t < 1$; además

$$F(s,1) = e_x$$

Definición: Al grupo $\pi_1(X,x)$ lo llamamos grupo fundamental de X basado en x, o primer grupo de homotopía basado en x.

Proposición: Sea X espacio topológico y $x_0, x_1 \in X$. Si existe una trayectoria $g: I \to X$ tal que $g(0) = x_0$ y $g(1) = x_1$, es decir, que une a x_0 con x_1, entonces $\pi_1(X,x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X,x_1)$.

Demostración: Consideremos $h_g: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ definida como $h_g([f]) = [\bar{g} f g]$.



1) Para demostrar que está bien definida, queremos ver que si $f \simeq f_1$, entonces $h_g([f]) = h_g([f_1])$, es decir, $\bar{g} f g \simeq \bar{g} f_1 g$. Como el producto está bien definido, la función también.
2) Queremos mostrar que $h_g([f][g]) = h_g([f]) h_g([h])$. Veamos que:
$$h_g([f][h]) = h_g([fh]) = [\bar{g} f h g] = [\bar{g} f g \bar{g} h g] = [\bar{g} f g][\bar{g} h g] = h_g([f]) h_g([h])$$
3) Queremos mostrar que es un isomorfismo. Sea
$$h_{\bar{g}}: \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$$
$$h_{\bar{g}}([h]) = [g h \bar{g}]$$
Claramente
$$h_g h_{\bar{g}} = \mathbb{I}_{\pi_1(X, x_1)}$$
$$h_{\bar{g}} h_g = \mathbb{I}_{\pi_1(X, x_0)}$$

Corolario: Si X es arcoconexo, entonces $\pi_1(X, x)$ es isomorfo a $\pi_1(X, y)$ para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$. En este caso, escribimos $\pi_1(X)$.

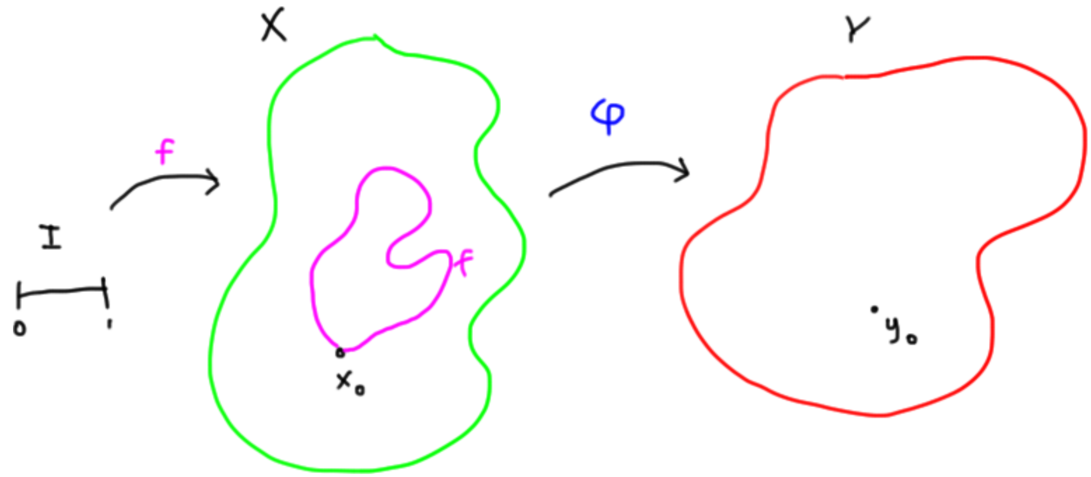
Notación: Sea $\varphi: X \to Y$ continua, tal que $\varphi(x_0) = y_0$ donde $x_0 \in X, y_0 \in Y$. En este caso, denotaremos la función como

$$\varphi: (X, x_0) \to (Y, y_0)$$

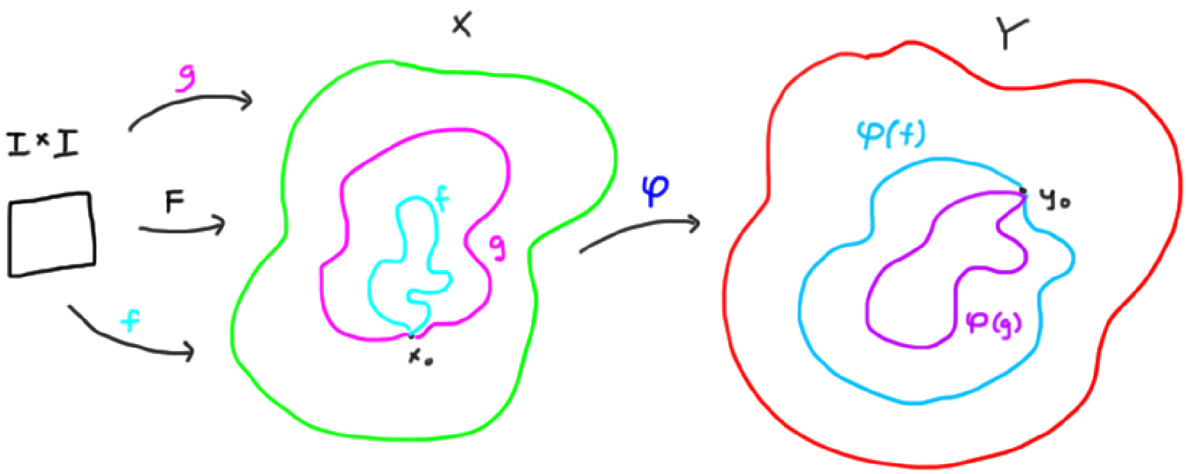
Proposición: Sea $\varphi: (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Definimos

$$\varphi_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$
$$\varphi_*([f]) = [\varphi(f)]$$

entonces φ_* es homomorfismo.



Demostración: 1) Veamos primero que está bien definida. Sea $g \simeq f$. Queremos mostrar que $\varphi_*([f]) = \varphi_*([g])$, es decir $\varphi[f] \simeq \varphi[g]$.



Como $g \simeq f$, existe $F: I \times I \to X$ tal que $F(s,0) = f, F(s,1) = g, F(0,t) = x_0, F(1,t) = x_0$. Sea $G: I \times I \to X$ definida como $G(s,t) = \varphi\big(F(s,t)\big)$, que es una homotopía entre $\varphi(f)$ y $\varphi(g)$.

2) $\varphi_*([f][h]) = \varphi_*([fh]) = [\varphi(fh)]$

$$\varphi(fh) = \begin{Bmatrix} \varphi(f) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \\ \varphi(h) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{Bmatrix}$$

de donde

$$[\varphi(f)\varphi(h)] = [\varphi(f)][\varphi(h)]$$

Observación: Si $\varphi: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y $\psi: (X, x_0) \to (Z, z_0)$ funciones continuas, entonces

$$(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$$

Veamos que

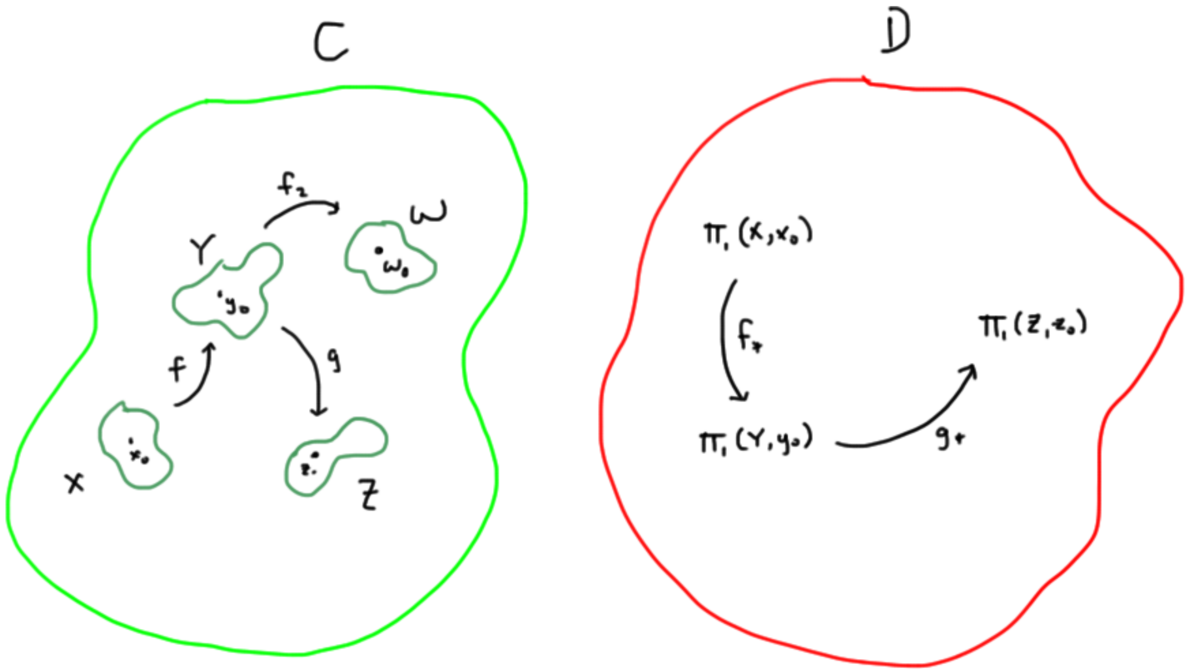
$$(\psi\varphi)_*([f]) = [\psi(\varphi(f))]$$

y

$$(\psi\varphi)_*([f]) = \psi_*([\varphi_*([f])]) = [\psi(\varphi(f))]$$

Sea $\mathbb{I}: (X, x_0) \to (X, x_0)$ la identidad. Entonces $\mathbb{I}_* = \mathbb{I}_{\pi_1(X,x_0)}$.

Paréntesis: Puntores



Si $f: X \to Y$ entonces $F(f): F(X) \to F(Y)$, $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ y $F(\mathbb{I}_X) = \mathbb{I}_{F(X)}$.

Cierra paréntesis

Teorema: Sea $\varphi: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ homeomorfismo. Entonces

$$\varphi_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

es un isomorfismo.

Demostración: Sea $\psi: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ la inversa de φ. Como $\psi\varphi = \mathbb{I}_X$, entonces

$$(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_* = \mathbb{I}_{\pi_1(X,x_0)}$$

y de aquí se concluye que φ_* es sobreyectiva.

Análogamente, con la otra composición, se concluye que φ_* es inyectiva.

Proposición: Sean $\varphi:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ y $\psi:(X,x_0)\to(Y,y_1)$ funciones continuas. Si φ es homotópica a ψ, entonces existe una trayectoria $\alpha: I\to Y$ que une a y_0 con y_1 tal que

$$\psi_* = h_\alpha \circ \varphi_* = \bar{\alpha}\varphi_*\alpha$$

DIBUJO

DIAGRAMA

Demostración: Existe $F: X\times I\to Y$ tal que $F(x,0)=\varphi$ y $F(x,1)=\psi$ continua. Sea $\alpha: I\to Y$ la función $\alpha(t)=F(x_0,t)$.

DIBUJO

Queremos demostrar que $\psi_*([f]) = h_\alpha\varphi_*$.

Recordemos que $\psi_*([f]) = [\bar{\alpha}\varphi(f)\alpha] = [\bar{\alpha}][\varphi(f)][\alpha]$ y, equivalentemente, $[\alpha][\psi(f)][\bar{\alpha}] = [\varphi(f)]$. O bien, $\alpha\psi(f)\bar{\alpha} \simeq \varphi(f)$.

Sea $\alpha_t: I\to Y$ que une y_0 con $\alpha(t)$. Sea $\beta_t(s) = F(f(s),t)$. Si $\alpha: I\to Y$ es $\alpha(r)$, entonces $\alpha_t: I\to Y$ es $\alpha_t(t)=\alpha(tr)$.

DIBUJO

Definimos la trayectoria $(\alpha_t\beta_t)\overline{\alpha_t}(s)$ y veamos que

$$(\alpha_0\beta_0)\overline{\alpha_0}(s) = e_{y_0}\varphi(f)e_{y_0} = \varphi(f)$$

$$(\alpha_1\beta_1)\overline{\alpha_1}(s) = \alpha\psi(f)\bar{\alpha}$$

Sea $G: I\times I\to Y$ la función

$$G(s,t) = \begin{cases} \alpha_t & 0\le s\le \frac{1}{4} \\ F(f(4s-1),t) & \frac{1}{4}\le s\le\frac{1}{2} \\ \overline{\alpha_t}(2s-1) & \frac{1}{2}\le s\le 1 \end{cases}$$

$$G(s,t) = \begin{cases} \alpha(4st) & 0\le s\le \frac{1}{4} \\ F(f(4s-1),t) & \frac{1}{4}\le s\le\frac{1}{2} \\ \alpha\big(2t(1-s)\big) & \frac{1}{2}\le s\le 1 \end{cases}$$

Por lo anterior, G es una homotopía entre $\varphi(f)$ y $\alpha\psi(f)\bar{\alpha}$.

Observación: Si la homotopía entre φ y ψ es relativa a $\{x_0\}$, entonces $\psi_* = \varphi_*$.

Teorema: Sea $\varphi: X \to Y$ la equivalencia homotópica y $\varphi(x_0) = y_0$. Entonces

$$\varphi_*: \pi_1(X, x_0) \to (Y, y_0)$$

es isomorfismo.

Demostración: Como φ es la equivalencia homotópica, entonces existe $\psi: Y \to X$ tal que $\psi\varphi \simeq \mathbb{I}_X$ y $\varphi\psi \simeq \mathbb{I}_Y$. Sea $x_1 = \psi(y_0)$.

$$\pi_1(X, x_0) \overset{\varphi_*}{\to} (Y, y_0) \overset{\psi_*}{\to} \pi_1(X, x_1) \overset{\varphi_*}{\to} \big(Y, \varphi(x_1)\big)$$

Además

$$\psi_* \circ \varphi_* \simeq \mathbb{I}_* \Rightarrow \psi_* \circ \varphi_* = h_\alpha \circ \mathbb{I}_* = h_\alpha$$

como h_α es isomorfismo, entonces φ_* es inyectiva.

Luego, como h_β es isomorfismo y $\varphi_* \circ \psi_* \simeq h_\beta$, entonces ψ_* es inyectiva también.

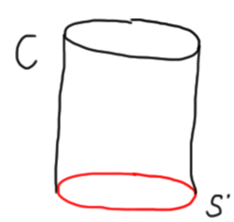
Como φ_* y ψ_* son ambas inyectivas y $\psi_* \circ \varphi_*$ es un isomorfismo, entonces φ_* es sobreyectiva. Por lo tanto, φ_* es isomorfismo.

Corolario: Si X es contráctil, entonces $\pi_1(X)$ es trivial.

Demostración: Como X es contráctil, entonces X es del mismo tipo de homotopía que $\{x_0\}$, $x_0 \in X$. Además, como $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(\{x_0\})$. Como $\pi_1(\{x_0\})$ es trivial, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es trivial.

Definición: Se dice que un espacio X es simplemente conexo si y sólo si X es arco-conexo y $\pi_1(X)$ es trivial.

Ejemplo: $\pi_1(C) = \pi_1(S^1)$.



Ejemplo: $X \subset \mathbb{R}^n$ es conexo.

Proposición: X es simplemente conexo si y sólo si para cualesquiera dos puntos de X exista una única clase de homotopía de trayectorias que las une.

Demostración: Supongamos que X es simplemente conexo. Sean $x, y \in X$ y sean $f, g: I \to X$ trayectorias tales que $f(0) = x = g(0)$ y $f(1) = y = g(1)$. Entonces, $f \cdot g^{-1}$ es un lazo basado en x y $\pi_1(X, x)$ es trivial porque X es simplemente conexo, entonces $f \cdot g^{-1} \simeq e_x$.

Veamos que

$$f \simeq fe_x \simeq f(g^{-1}g) = (fg^{-1})g \simeq e_x g \simeq g$$

de donde $[f] = [g]$.

Ahora, supongamos que para cualesquiera dos puntos de X existe una única clase de homotopía de trayectorias que las une. Entonces, X es arcoconexo por hipótesis. Sea $f: I \to X$ un lazo basado en x. como existe una única clase de homotopía de trayectorias basada en x, luego $[f] = [e_x]$, de aquí $\pi_1(X, x)$ es trivial.

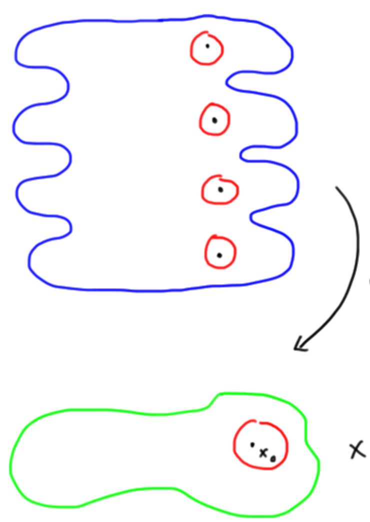
Ahora vamos rumbo a probar que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ para lo cual necesitamos conocer lo básico de espacios cubrientes.

Espacios cubrientes

Definición: Sea X espacio topológico y $x \in X$, y sea $p: Y \to X$ función continua. Decimos que una vecindad de x, U_x en X está parejamente cubierta (bien cubierta) por p si y sólo si

$$p^{-1}(U_x) = \bigvee_{\alpha \in J} U_\alpha\,, \qquad \left(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha, U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset, \alpha \neq \beta \right)$$

tal que $p|_{U_\alpha}: U_\alpha \to U_x$ es homeomorfismo.

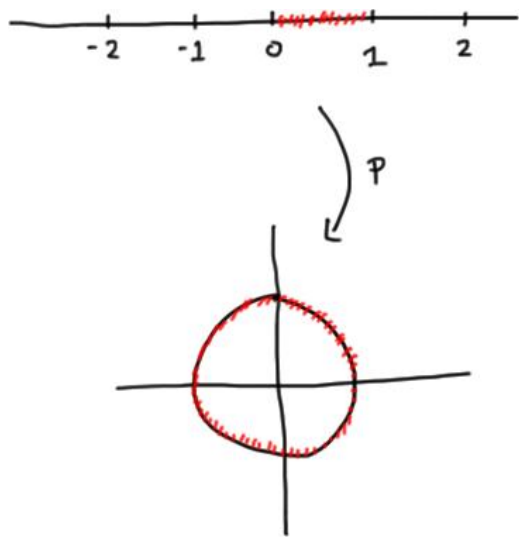


Definición: Sea $p: Y \to X$ una función continua y sobre. Decimos que p es una función cubriente y que Y es un espacio cubriente si y sólo si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad parejamente cubierta por p.

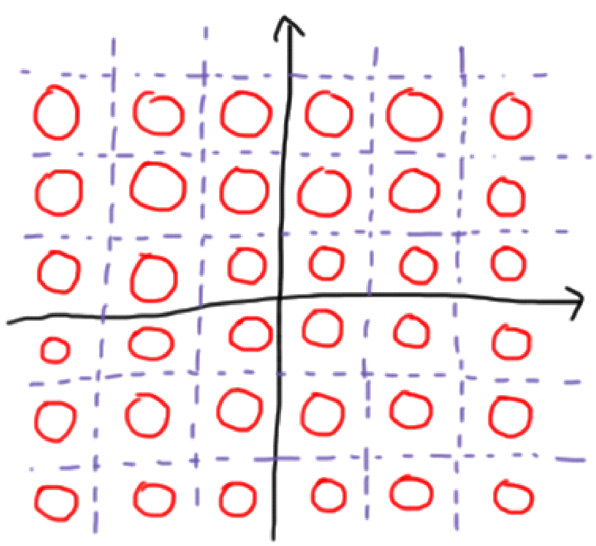
Ejemplo: Si $p: Y \to X$ homeo, entonces p es función cubriente.

Ejemplo: Sea X espacio topológico y D un espacio discreto (con la topología discreta). Entonces $p: X \times D \to X$ es función cubriente.

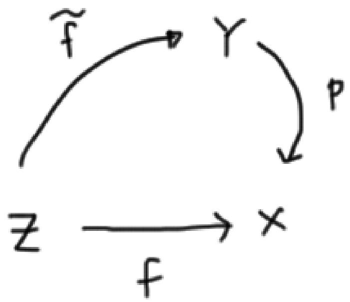
Ejemplo: Sea $p: \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ la función $p(t) = (\cos 2\pi t\,, \sin 2\pi t)$.



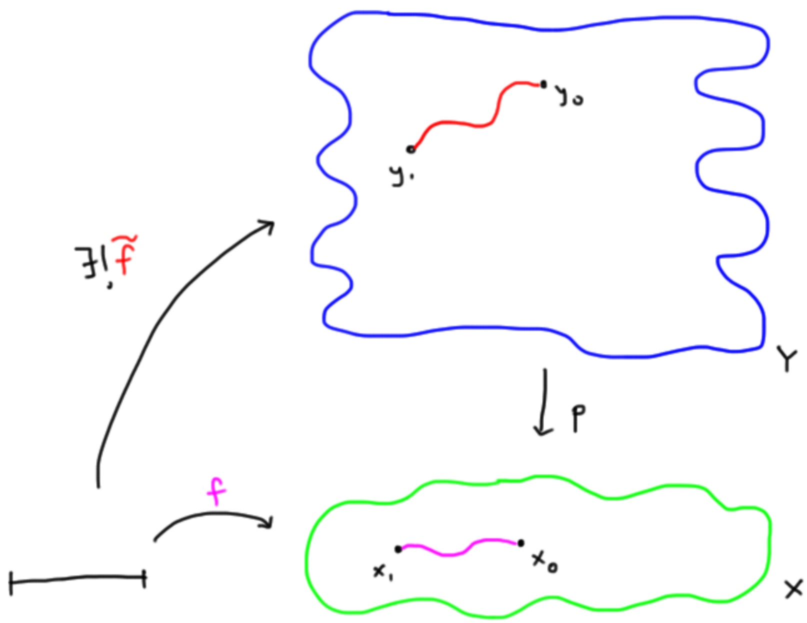
Ejemplo: Sea $p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ la función $p(s,t) = (\cos 2\pi s\,, \sin 2\pi s, \cos 2\pi t\,, \sin 2\pi t)$.



Definición: Sean $p: Y \to X$ función (continua) y $f: Z \to X$ función (continua). Decimos que $\tilde{f}: Z \to X$ es un levantamiento de f si y sólo si $p \circ \tilde{f} = f$.



Proposición: Sea $p:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ una función cubriente y f una trayectoria en X tal que $f(0)=x_0$ ($f:I\to X$ continua). Entonces, existe un único levantamiento $\tilde{f}$ de f tal que $\tilde{f}(0)=y_0$.



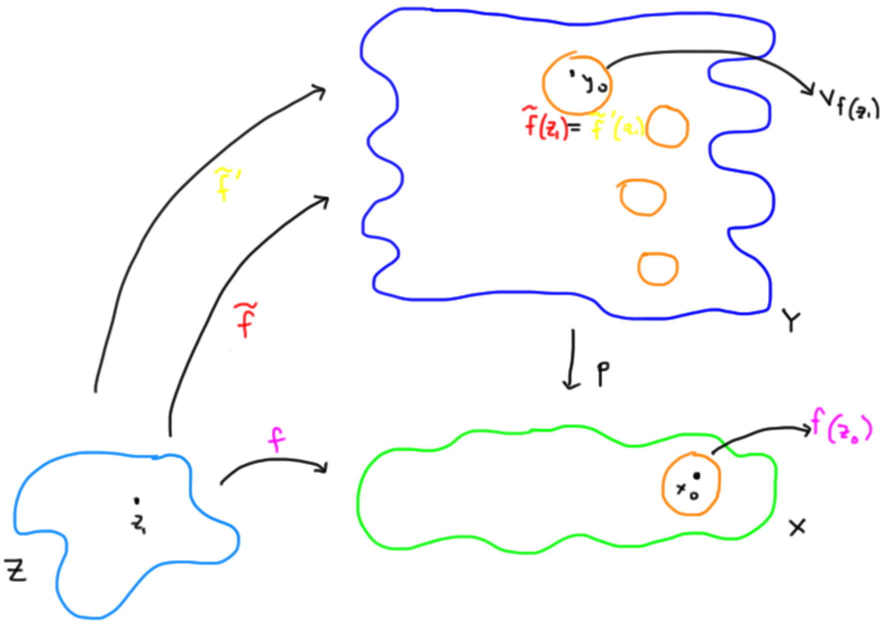
Proposición: Sea $p:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ función cubriente y $f:(Z,z_0)\to(X,x_0)$ función continua. Supongamos que Z es conexo. Si existe una función continua $\tilde{f}:(Z,z_0)\to(Y,y_0)$ tal que $p\circ\tilde{f}=f$ entonces $\tilde{f}$ es única.

Demostración: Supongamos $\widetilde{f}':(Z,z_0)\to(Y,y_0)$ continua y $p\circ\widetilde{f}'=f$. Definimos los conjuntos

$$A=\{z\in Z|\tilde{f}(z)=\widetilde{f}'(z)\}$$
$$B=\{z\in Z|\tilde{f}(z)\neq\widetilde{f}'(z)\}$$

Observemos que $A\neq\emptyset$ pues $z_0\in A$.

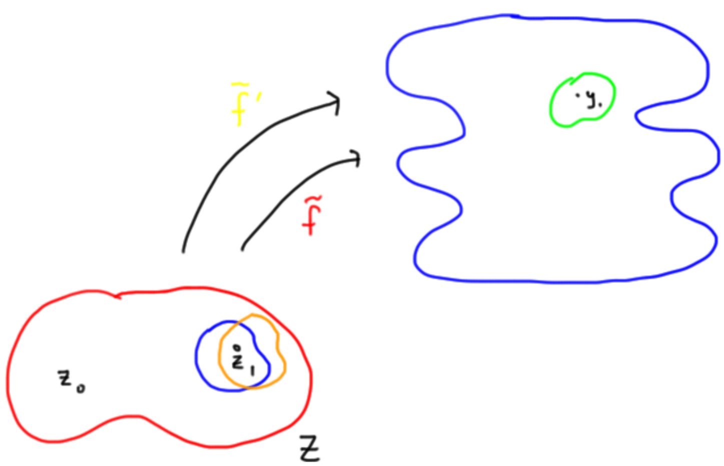
Queremos mostrar que ambos conjuntos son abiertos. Como $A\neq\emptyset$, tendría que pasar que $B=\emptyset$ pues Z es conexo.



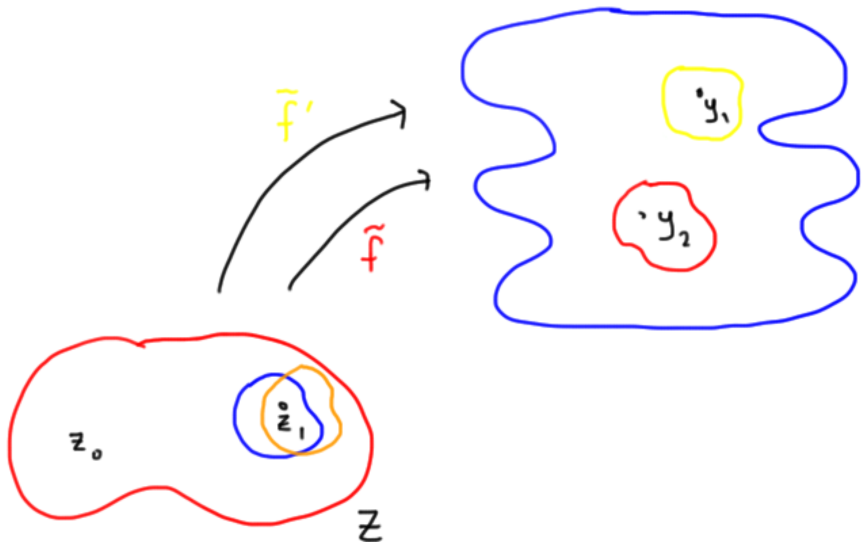
1) Demostremos que A es abierto. Sea $z_1 \in A$. P.D.: existe una vecindad de z_1 contenida en A. Sea $V_{f(z_0)}$ un abierto parejamente cubierto por p.

$$p^{-1}\left(V_{f(z_0)}\right) = \bigvee_{\alpha \in J} U_\alpha$$

Sea U_{y_1} el elemento de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ que contiene a y_1. Entonces $\tilde{f}^{-1}\left(U_{y_1}\right) \cap \widetilde{f'}^{-1}\left(U_{y_1}\right)$ es una vecindad de z_1 y está contenido en A, pues $p \circ \tilde{f} = p\widetilde{f'}$ y $p|_{U_{y_1}}$ es homeomorfismo.



2) Demostrar que B es abierto. Sea $z_2 \in B$. Sea U_{y_i} el elemento de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ que contiene a y_i para $i \in \{1,2\}$ donde $y_1 = \tilde{f}(z_2)$ y $y_2 = \widetilde{f'}(z_2)$. Entonces $\tilde{f}^{-1}\left(U_{y_2}\right) \cap \widetilde{f'}^{-1}\left(U_{y_1}\right)$ es una vecindad de z_2 contenido en B.



Lema (Número de Lebesgue): Sea (X, ρ) un espacio métrico y sea G un cubrimiento abierto de X. Si X es secuencialmente compacto (toda sucesión de elementos de X tiene una subsucesión convergente en X), luego existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in X$, $B(x, \alpha)$ está contenida en algún $G \in G$.

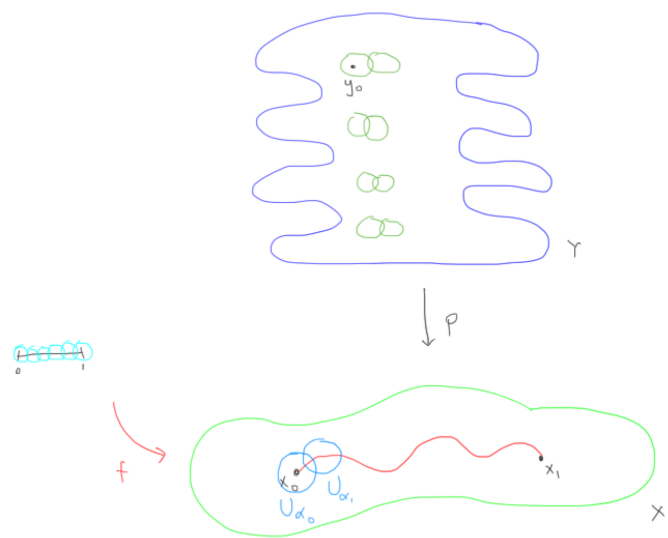
Demostración: Procedemos por contradicción. Supongamos que X es un espacio secuencialmente compacto y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subseteq G$ para todo $G \in G$. Como X es secuencialmente compacto, existe una subsucesión de x_n, que denotaremos x_{n_k}, que converge en X. Sea x dicho límite, luego, tendremos que existe $G \in G$ y $\delta > 0$ tales que $B(x, 2\delta) \subset G$. Por loa convergencia de x_{n_k} a x, tendremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\rho\left(x_n, x_{n_k}\right) < \delta, k \geq N$, lo que es una contradicción, pues esto implicaría que existe $G \in G$ tal que $B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subset B\left(x_{n_k}, \delta\right) \subset G, k \geq \max\left\{N, \frac{1}{\delta}\right\}$.

Proposición: Sea $p: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ una función cubriente y sea $f: I \to X$ una trayectoria tal que $f(0) = x_0$. Entonces, existe un único levantamiento $\bar{f}$ de f tal que $\bar{f}(0) = y_0$.

Demostración:

Definimos $\bar{f}(0) = y_0, y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Sea $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ una subdivisión de I tal que $f([s_i, s_{i+1}]) \subset U_\alpha$ donde U_α es una vecindad bien cubierta por p.

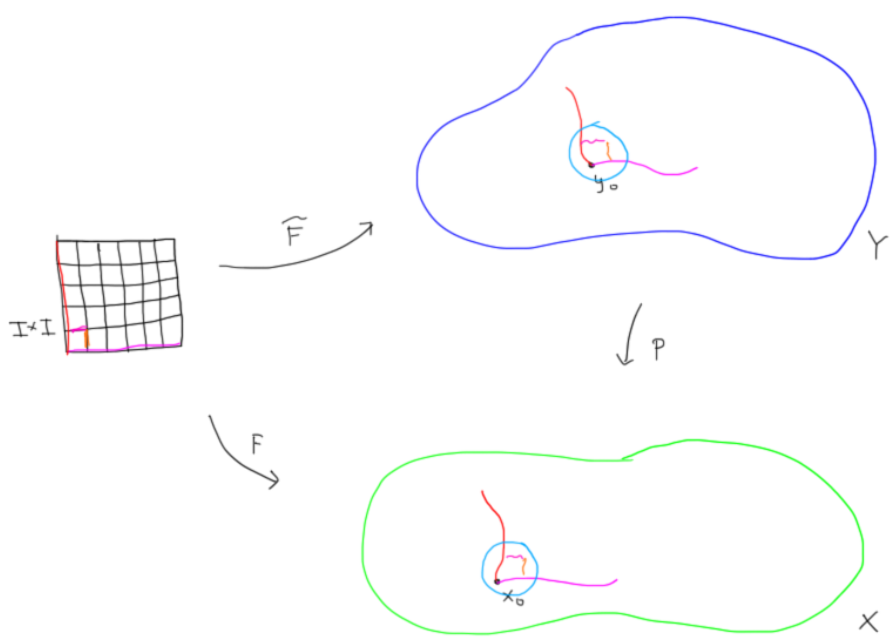
Supongamos que existe $\bar{f}: \left[0, s_{i_0}\right] \to Y$ con $\bar{f}(0) = y_0$ continua. Queremos definir $\bar{f}: \left[s_{i_0}, s_{i_0+1}\right] \to Y$. Sabemos que $f(s_{i_0})$ pertenece a una vecindad U_{i_0} que está bien cubera por p. Sabemos que $f\left[s_{i_0}, s_{i_0+1}\right]$ pertenece a una vecindad U_{i_0} que está bien cubierta por p. Sea $\overline{U}_{i_0}$ la vecindad de $\bar{f}(s_{i_0})$ tal que $p|_{\overline{U}_{i_0}}$ es homeomorfismo de $\overline{U}_{i_0}$ en U_{i_0}.



Definimos $\bar{f}: [s_{i_0}, s_{i_0+1}] \to Y$ como $\bar{f}(s) = p^{-1}|_{U_{i_0}}(f(s))$. Veamos que $\bar{f}: [0, s_{i_0+1}]$ es continua por el lema del pegado.

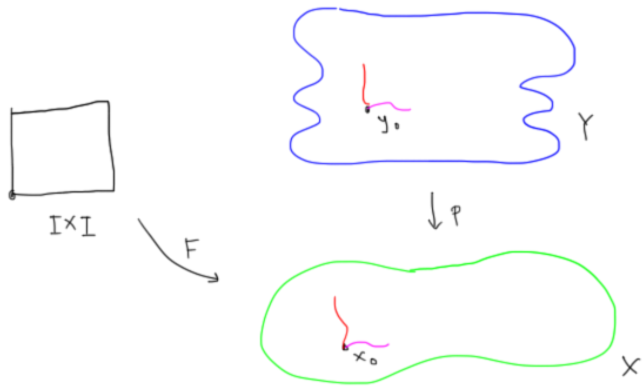
Continuamos inductivamente hasta que tenemos definida $\bar{f}$ en $[0,1]$. Para esto, usamos el hecho de que I es compacto –usando el teorema de Heine-Borel- y también $f(I)$ es compacto.

Levantamiento de homotopías



Proposición: Sea $p: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ una función cubriente y sea F una función continua de $I \times I$ en X con $F(0,0) = x_0$. Entonces existe un único levantamiento $\tilde{F}$ de F tal que $\tilde{F}(0,0) = y_0$.

Si F es una homotopía entre trayectorias f, g, entonces $\tilde{F}$ es una homotopía entre los levantamientos $\tilde{f}, \tilde{g}$.



Demostración: Sea $\tilde{F}(0,0) = y_0$. Por la proposición anterior, $\tilde{F}$ la podemos extender a los conjuntos $I \times \{0\}, \{0\} \times I$. Sean $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ y $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ una subdivisión de $I \times I$ de forma tal que $F\left([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]\right)$ están contenidos en una vecindad bien cubierta por p.

Para facilitar la notación, definimos $I_i \times I_j = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$. Sean $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}, j_0 \in \{1,2, \ldots, n\}$. Supongamos que $\tilde{F}$ está definida en los siguientes conjuntos:

$$A = I_i \times I_j \text{ para } j < j_0, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$B = I_i \times I_{j_0} \text{ para } i < i_0$$

Sea $C = I \times \{0\} \cup \{0\} \times I \cup A \cup B$.

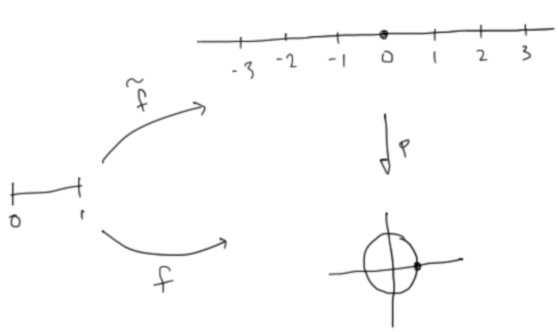
Queremos definir $\tilde{F}$ en $I_{i_0} \times I_{j_0}$. Como $\tilde{F}$ está definida en C, entonces $\check{F}(C \cap I_{i_0} \times I_{j_0})$ es conexo y está contenido en alguna vecindad $\tilde{U}_{\alpha_0} \in \{\tilde{U}_\alpha\}$ donde $p^{-1}(U_\alpha) = \bigvee_{\alpha \in J} \tilde{U}_\alpha$ y U_α es una vecindad que contiene a $F(I_{i_0} \times I_{j_0})$ y está bien cubierta por p.

Como $p|_{\tilde{U}_{\alpha_0}}$ es homeomorfismo, entonces existe $p^{-1}|_{\tilde{U}_{\alpha_0}}$. Definimos $\tilde{F}(x) = p^{-1}|_{\tilde{U}_{\alpha_0}}\left(F(s)\right)$ para toda $x \in I_{i_0} \times I_{j_0}$. $\tilde{F}$ es continua en $C \cup I_{i_0} \times I_{j_0}$ por el lema del pegado.

Continuamos la construcción hasta que la hayamos definido en todo $I \times I$.

Proposición: $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ donde $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 | |x| = 1\}$.

Demostración: Sea $x_0 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$.



Sea $p: (\mathbb{R}, 0) \to (S^1, x_0)$ definida como $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

Sea $\varphi: \pi_1(S^1, x_0) \to \mathbb{Z}$ la siguiente función:

$$\varphi([f]) = \tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$$

donde $\tilde{f}$ es un levantamiento de f tal que $\tilde{f}(0) = 0$.

Por demostrar:

1) φ está bien definida.
2) es sobreyectiva
3) es inyectiva
4) es morfismo

1) Sea $f' \simeq f \ \ rel \{0, 1\}$. Queremos demostrar que $\varphi([f]) = \varphi([f'])$

Existe una función continua $f: I \times I \to S^1$ tal que $F(s, 0) = f, F(s, 1) = f', F(0, t) = x_0 = F(1, t)$ por definición de homotopía relativa. Sea $\tilde{F}: I \times I \to \mathbb{R}$ el levantamiento de F tal que $\tilde{F}(0, 0) = 0$. Entonces el levantamiento de $f, \tilde{f}$ y el levantamiento de $f', \widetilde{f'}$ son homotópicos.

$\tilde{F}(\{0\} \times I) \subseteq \mathbb{Z}$ y como $\{0\} \times I$ es conexo, entonces $\tilde{F}(\{0\} \times I) = 0$. Análogamente, $F(\{1\} \times I) = m \in \mathbb{Z}$. De aquí, $\tilde{f}(1) = m = \widetilde{f'}(1)$.

Por lo tanto, $\varphi([f]) = \varphi([f'])$.

2) Sea $m \in \mathbb{Z}$. Queremos mostrar que existe $f: I \to S^1$, donde f es un lazo $f(0) = x_0 = f(1)$ y tal que $\varphi([f]) = m$.

Sea $\tilde{f}: I \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}(0) = 0$ y $\tilde{f}(1) = m$.

Sea $f = p \circ \tilde{f}$. Se puede ver que $[f] \in \pi_1(S^1, x_0)$. Entonces $\varphi([f]) = \tilde{f}(1) = m$.

3) Supongamos que $\varphi([f]) = \varphi([g])$. Queremos demostrar entonces que $f \simeq g \ \ rel\{0,1\}$.

Entonces, $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$, donde $\tilde{f}, \tilde{g}$ levantamientos en $0 \in \mathbb{R}$ de f, g respectivamente. Por la proposición anterior, $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$, es decir, existe $F: I \times I \to \mathbb{R}$ tal que $F(s, 0) = \tilde{f}$ y $F(s, 1) = \tilde{g}$.

Sea $H: I \times I \to S^1$ la función $p \circ F$. Es continua, pues ambas son continuas. Además,

$$H(s, 0) = p\big(F(s, 0)\big) = p \circ \tilde{f} = f$$
$$H(s, 1) = p\big(F(s, 1)\big) = p \circ \tilde{g} = g$$

y, por lo tanto, $[f] = [g]$.

4) Por demostrar: $\varphi([f \cdot g]) = \varphi([f]) + \varphi([g])$

Observación: $p(n + x) = p(x); n \in \mathbb{N}$.

Sea $h: I \to \mathbb{R}$ definida como

$$h(s) = \begin{cases} \tilde{f}(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ n + \tilde{g}(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

donde $\tilde{f}, \tilde{g}$ son levantamientos de f, g respectivamente y $n = f(1)$.

Afirmamos que $h(s)$ es el levantamiento en 0 de $f \cdot g$. Veamos que

$$p \circ h(s) = \begin{cases} p\left(\tilde{f}(2s)\right) = f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ p\big(n + \tilde{g}(2s-1)\big) = p\big(\tilde{g}(2s-1)\big) = g(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

De aquí, $p\big(h(s)\big) = f \cdot g(s)$. Y así

$$\varphi([f \cdot g]) = h(1) = n + \tilde{g}(1) = \varphi([f]) + \varphi([g])$$

Proposición: S^1 no es retracto de $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 | |x| \leq 1\}$.

Demostración: Supongamos que sí, para proceder por contradicción. Es decir, existe una retracción de D^2 en S^1 $r: D^2 \to S^1$ tal que r es continua y $r \circ i = \mathbb{I}_{S^2}$.

entonces

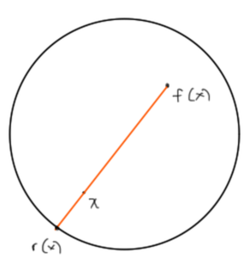
$$S^1 \xrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{r} S^1$$
$$\pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1)$$

pero $r_* \circ i_* = \mathbb{I}_{\pi_1(S^1)}$ que implica que $\mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z}$ que es una contradicción.

Teorema (Punto fijo de Brouwer): Sea $f: D^2 \to D^2$ función continua. Entonces existe $x \in D^2$ tal que $f(x) = x$.

Demostración: Supongamos que no existe tal x, es decir, para toda $x \in D^2, f(x) \neq x$.

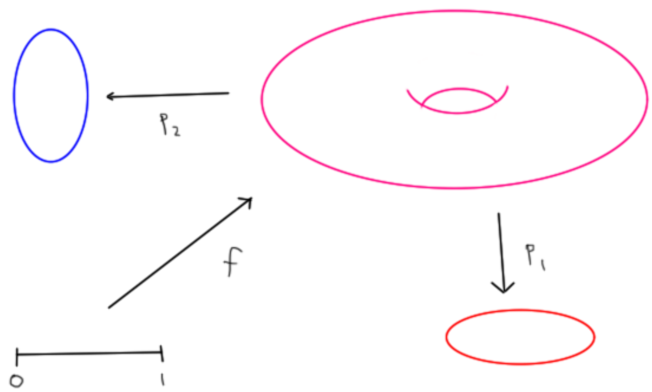
Sea $r(x) = f(x) + t_x\big(x - f(x)\big)$, donde $|r(x)|^2 = 1$. Entonces $r|_{S^1} = \mathbb{I}_{S^1}$. Observemos que $r(x)$ es continua.



Entonces r es una retracción de D^2 en S^1, que es imposible.

Proposición: $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$

Demostración: Sea $\varphi([f]) = ([p_1 \cdot f], [p_2 \cdot f])$



1) Queremos demostrar que φ está bien definida. Supongamos que $f \simeq g$. Por demostrar, $\varphi([f]) = \varphi([g])$.

Como son homotópicas, existe $F: I \times I \to X \times Y$ tal que $F(s, 0) = f$ y $F(s, 1) = g$.

Sea $G(s,t) = \big(p_1 \circ (s,t), p_2 \circ F(s,t)\big)$. Sabemos que es continua pues es composición de continuas en cada una de sus entradas. Podemos ver que:

$$G(s, 0) = \big(p_1 \circ f(s), p_2 \circ f(s)\big) = \big(f_1(s), f_2(s)\big) = f(s)$$
$$G(s, 1) = g(s)$$

Entonces $([p_1 \circ f], [p_2 \circ f]) = ([p_1 \circ g], [p_2 \circ g])$.

2) Queremos demostrar que φ es sobre. Sea $([f], [g]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Sea $h(s) = \big(f(s), g(s)\big)$. Entonces

$$h(0) = (x_0, y_0) = h(1)$$

continua en el producto. Por lo tanto

$$\varphi([h]) = ([p_1 \circ h], [p_2 \circ h]) = ([f], [g])$$

3) Queremos demostrar que φ es inyectiva. Supongamos que $\varphi([f]) = \varphi([g])$. Por demostrar: $[f] = [g]$.

Eso quiere decir que

$$([p_1 \circ f], [p_2 \circ f]) = ([p_1 \circ g], [p_2 \circ g])$$
$$\Rightarrow [p_i \circ f] = [p_i \circ g]$$
$$\Rightarrow p_i \circ f \simeq p_i \circ g$$

$$\Rightarrow f_i(s) \simeq g_i(s)$$

pues $f(s) = \big(f_1(s), f_2(s)\big)$ y $g(s) = \big(g_1(s), g_2(s)\big)$.

Sea H_i la homotopía entre f_i y g_i relativa al $\{0,1\}$.

Sea $G(s,t) = (H_1, H_2)$. Esto es una homotopía entre f y g relativa al $\{0,1\}$.

4) Queremos demostrar que $\varphi([f \cdot g]) = \varphi([f]) \cdot \varphi([g])$.

Veamos que, por un lado,

$$\begin{aligned}
\varphi([f \cdot g]) &= ([p_1 \circ (f \cdot g)], [p_2 \circ (f \cdot g)]) \\
&= ([p_1 \circ f \cdot p_1 \circ g], [p_2 \circ f \cdot p_2 \circ g]) \\
&= ([p_1 \circ f] \cdot [p_1 \circ g], [p_2 \circ f] \cdot [p_2 \circ g]) \\
&= ([f_1(s)] \cdot [g_1(s)], [f_2(s)] \cdot [g_2(s)])
\end{aligned}$$

Y, por el otro lado,

$$\begin{aligned}
&\varphi([f]) \cdot \varphi([g]) = ([p_1 \circ f], [p_2 \circ f]) \cdot ([p_1 \circ g] \cdot [p_2 \circ g]) \\
&= ([f_1], [f_2]) \cdot ([g_1] \cdot [g_2]) \\
&= ([f_1] \cdot [g_1], [f_2 \cdot g_2])
\end{aligned}$$

■

Corolario: $\pi_1(T) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ donde $T = S^1 \times S^1$.

Usando el teorema anterior,

$$\pi_1(S^1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{Z}$$

Y en general,

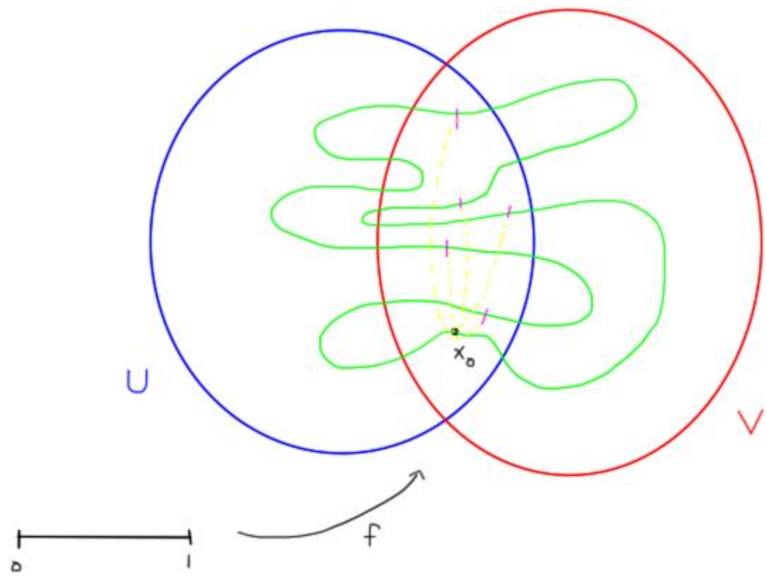
$$\pi_1\Bigg(\underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}\Bigg) = \mathbb{Z}^n$$

Teorema: Sea $X = U \cup V$ donde U, V abiertos en X y $U \cap V \neq \emptyset$ y arco-conexo.

Si U, V son simplemente conexos, entonces $\pi_1(X)$ es trivial.

Demostración: X arco-conexo pues U, V y $U \cap V$ arco-conexos. Sea $x_0 \in U \cap V$ y sea $f: I \to X$ un lazo basado en x_0.

Como f continua, $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ abiertos de I. Sean $\{W_\alpha\}_{\alpha \in J}$ la familia de las componentes arco-conexas de $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$. Son abiertos pues I es localmente arco-conexo. Entonces $\{W_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una cubierta abierta de I y por lo tanto es compacto, así que podemos tomar el número de Lebesgue.



Tomemos una subdivisión $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de forma tal que $f[t_{i-1}, t_i]$ esté contenido ya sea en U o en V.

Sin pérdida de generalidad, podemos considerar $f(t_i) \in U \cap V$.

Como la intersección es arco-conexa, consideremos trayectorias

$$\alpha_j: I \to U \cap V$$

tales que $\alpha_j(0) = f(t_j)$ y $\alpha_j(1) = x_0$.

Sea $\varphi_i: I \to [t_{i-1}, t_i]$ la función

$$\varphi_i(s) = st_i + (1-s)t_{i-1}$$

Definimos $f_i = f \circ \varphi$. Entonces

$$\begin{aligned} [f] &= [f_1\alpha_0 \cdot \bar{\alpha}_0 f_2 \alpha_1 \cdots \bar{\alpha}_{n-1} f_n] \\ &= [f_1\alpha_0][\bar{\alpha}_0 f_2 \alpha_1] \cdots [\bar{\alpha}_{n-1} f_n] \\ &= [e_{x_0}] \end{aligned}$$

pues cada una es igual a $[e_{x_0}]$.

Corolario: S^n es simplemente conexo $(n \geq 2)$

Demostración: Consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} U &= S^n \backslash \{(0, \dots, 1)\} \\ V &= S^n \backslash \{0, \dots, -1)\} \end{aligned}$$

Aplicando el resultado anterior, obtenemos la conclusión.

Aplicación: Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces podemos calcular $\pi_1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ para $n \geq 2$.

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) = \pi_1(S^{n-1} \times \mathbb{R}) = \pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(\mathbb{R})$$

Si $n \geq 3$, es trivial. Si $n = 2$, es igual a $\mathbb{Z}$.

Esto implica que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfas para $n \geq 3$. (Tampoco $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.)